Übung 7: Deterministisches Chaos und der indische Seiltrick

Teil I: Chaos, Lorenz-Attraktor

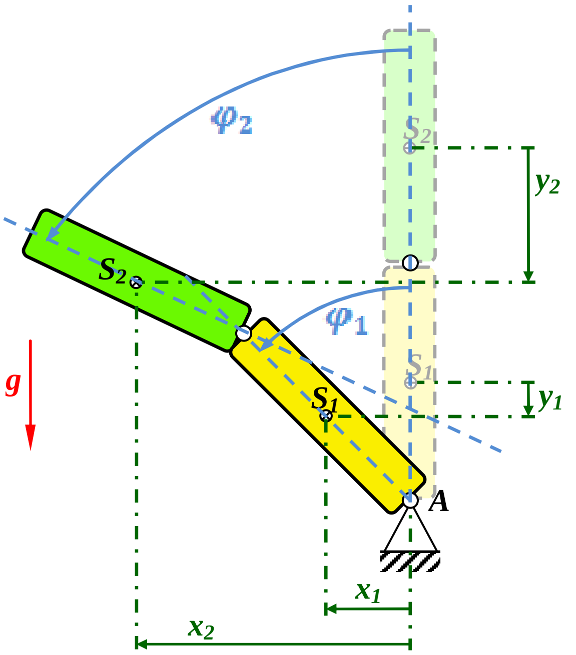
Chaotische Systeme können in mathematischer Formulierung sehr einfach aussehen. Als Beispiel hierfür dient der Lorenz-Attraktor, ein mathematisches Gebilde, das bei der Modellierung von Luftströmungen unter dem Einfluss von Temperaturdifferenzen entdeckt wurde. Es ist gegeben durch das folgende System von gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \sigma(y - x) \\ \dot{y} &= x(\rho - z) - y \\ \dot{z} &= xy - \beta z \end{aligned}$$

mit Parametern σ (Prandtl-Zahl), ρ (Rayleigh-Zahl) und β. Dieses System weist für bestimmte Parameterwerte chaotisches Verhalten auf, die Trajektorien folgen scheinbar einem sogenannten „Seltsamen Attraktor“ oder „Chaotischen Attraktor“. Typische Parameter, für die diese Art Chaos auftritt sind $(\sigma, \rho, \beta) = (10,\ 28,\ 8/3)$.

a. Betrachte die Lösung des Lorenz-Systems. Benutze dafür die Matlab-Funktion „lorenz“ und/oder zum Einstellen beliebiger Parameter die Funktion „myLorenz.m“ auf der Homepage.

Teil II: Chaos, Doppelpendel



In der Übung 5 haben wir bereits das einfache physikalische Pendel betrachtet (hier gelb eingefärbt). Gegeben waren folgende angaben, die nun auch auf den zweiten Teil (grün eingefärbt) des hier abgebildeten Doppelpendels gelten:

- Masse $m = 1$ kg
- Länge $\ell = 0{,}5$ m, „Radius“ $r = 0{,}5\ell$
- Breite $b = 0{,}05$ m
- $J_S = \frac{1}{12}m(l^2 + b^2)$ um Schwerpunkt S

Zum Zeitpunkt t_0 stehen beide Pendelteile senkrecht, also genau entgegengesetzt zur Richtung der Schwerkraft, und besitzen die Winkelgeschwindigkeiten $\dot{\varphi}_1 = 0°/\mathrm{s}$ und $\dot{\varphi}_1 = 45°/\mathrm{s}$.

Für das einfache Pendel berechnet hatten wir in Übung 5 bereits berechnet:

$$\begin{aligned} x_1 &= r_1 \sin\varphi_1 \\ y_1 &= r_1 - r_1 \cos\varphi_1 \\ E_{pot} &= m_1 g(-r_1 + r_1 \cos\varphi_1) \\ E_{kin} &= \tfrac{1}{2}\left(J_{S_1} + m_1 r_1^2\right) \end{aligned}$$

was mit $J_{A_1} = J_{S_1} + m_1 {r_1}^2$ zu folgender Differentialgleichung führte:

$$J_{A_1}\ddot{\varphi}_1 - m_1 g r_1 \sin\varphi_1 = 0.$$

b. Berechne x_2 in Abhängigkeit von x_1 und φ_2 sowie in Abhängigkeit von φ_1 und φ_2.
Berechne y_2 in Abhängigkeit von y_1 und φ_2 sowie in Abhängigkeit von φ_1 und φ_2.

c. Berechne die potentielle Energie E_{pot} in Abhängigkeit der Variablen x, y und φ.
Berechne die kinetische Energie E_{kin} in Abhängigkeit der Variablen x, y und φ.
Berechne daraus E_{pot} und E_{kin} lediglich in Abhängigkeit von φ_1 und φ_2 $(*)$.

d. Bestimme nun die Differentialgleichung, die das gegebene System beschreibt. Verwende dazu das Verfahren der Lagrange'schen Gleichungen 2. Art. $(*)$

$(*)$ **Hinweis:**
Fasse zur Notations-Vereinfachung konstante Terme geschickt zusammen. Verwende außerdem gegebenenfalls die Formeln

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$
$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1.$$

e. Simuliere das Doppelpendel mit MSC Adams. Zur Modellierung und Umsetzung siehe auch Übungsblatt 5.

Teil III: Der Indische Seiltrick

Aus „*David Acheson, 1089 oder Das Wunder der Zahlen, Jokers Edition, 2002*“: Im Februar 1999, während einer Zauberer-Konferenz in Südindien: Mitten auf einer der Hauptstraßen spielte der Magier, Professor Padmarajan, auf einer Schlangenbeschwörer-Flöte und aus einem großen Korb wand sich ein langes Seil und stieg in den Himmel, bis zu einer Höhe von etwa 5 Metern. Dann kletterte ein fünfjähriges Kind bis zur Seilspitze. Berichte ähnlicher Zaubertricks gehen bis ins 14. Jahrhundert zurück.

Aber was hat das mit Mathematik bzw. dieser Vorlesung zu tun?

Betrachten wir das Seil als ein langes nach oben gerichtetes N-fachpendel mit Aufhängepunkt A. Man kann zeigen, dass es möglich ist, diese N Pendel aufeinander zu balancieren, wenn man den Aufhängepunkt auf- und abschwingen lässt.

f. Wir nehmen an, dass der Aufhängepunkt folgende gleichförmige senkrechte Bewegung durchführt:

$$A_y(t) = \hat{a}\cos(\omega t)\,.$$

Stelle nun die zugehörige Differentialgleichung für das Einfachpendel auf.

g. Löse die Differentialgleichung mit Hilfe von Matlab unter Ergänzung der Lösung von Übungsblatt 5 (s. Homepage).

h. Bestimme Werte für $\hat{a}$ und ω sodass das Pendel nicht vollständig nach unten kippt.