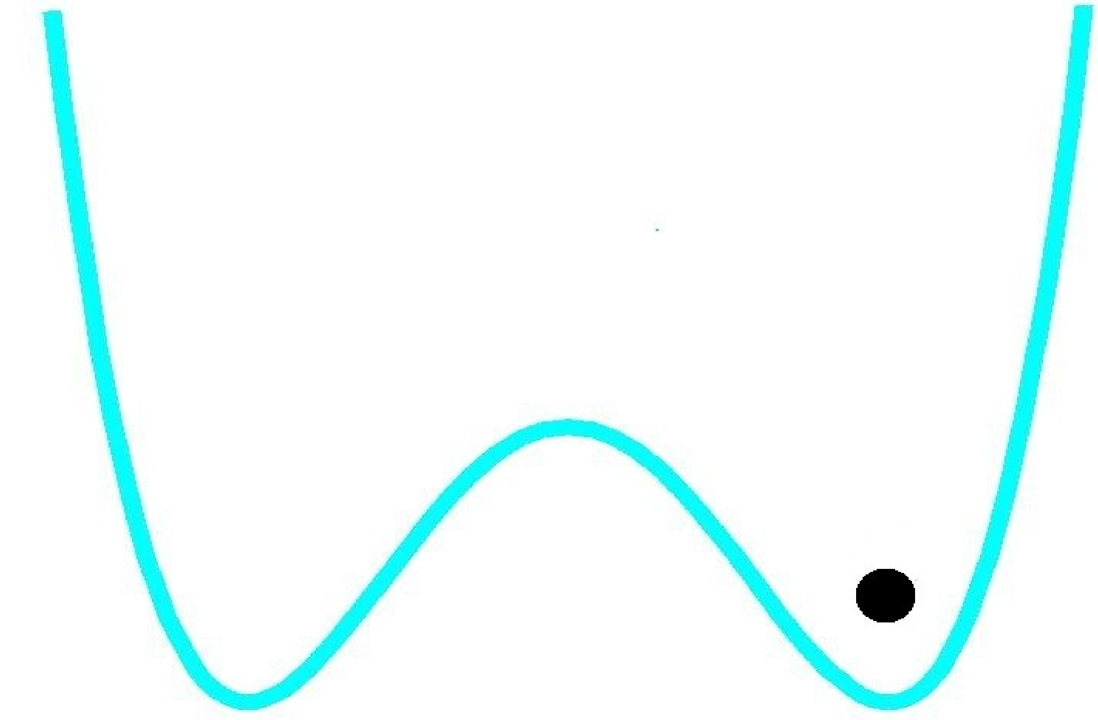
Kohärentes Tunneln

Doppeltopfpotential mit Beispiel am Ammoniakmolekül (NH_3)



Lisa Haag, Sabrina Kröner

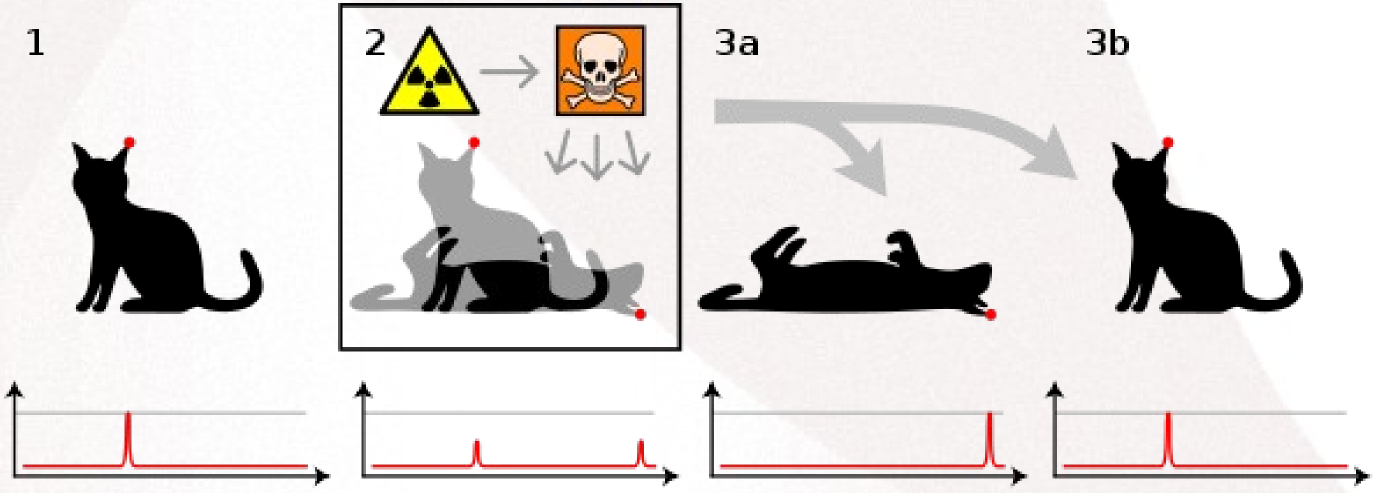
Gliederung

- Schrödingers Katze
- Doppeltopfpotential
  - Energieniveaus
  - Dynamik eines Wellenpakets
  - Kohärentes Tunneln
  - Hamiltonoperator
- Ammoniakmolekül

Schrödingers Katze

Gedankenexperiment von Erwin Schrödinger (1935), das Unvollständigkeit der Quantenmechanik aufzeigen soll.

Das System kann auch als Zweizustandssystem beschrieben werden.



Doppeltopfpotential

Eigenschaften des Doppeltopfpotentials

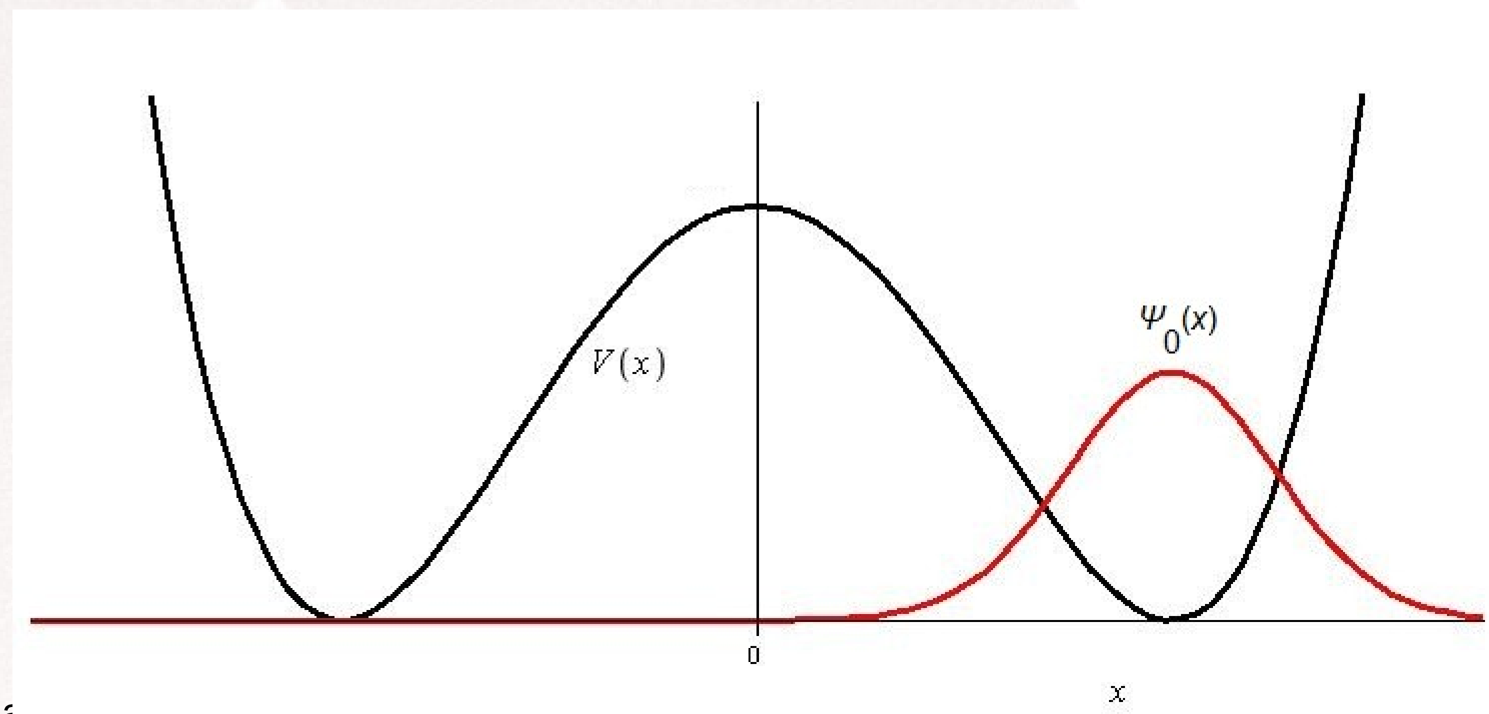
- Endliche Potentialbarriere
- Unendlich hohe Potentialwände
- Näherung durch zwei harmonische Oszillatoren

Tunneln nicht möglich

→ Teilchen in einer Mulde

→ Grundzustand $\Psi_0(x)$ mit $E_0 = \frac{\hbar\omega_0}{2}$

→ Zweifache Entartung

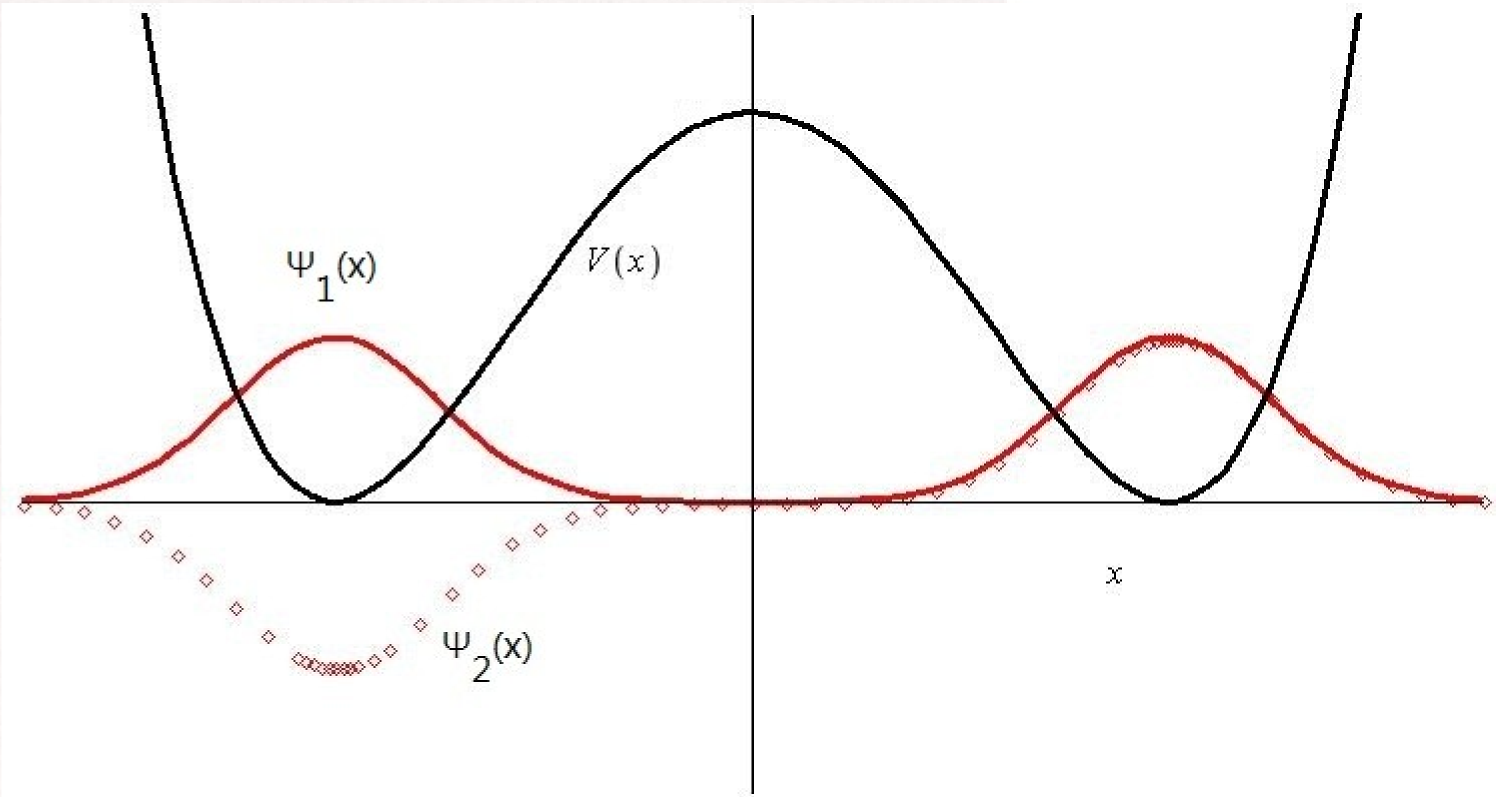


Jetzt: Tunneln erlaubt

Eigenzustände:

$$\Psi_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\Psi_0(x) + \Psi_0(-x)\right)$$

$$\Psi_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\Psi_0(x) - \Psi_0(-x)\right)$$



Schrödinger Gleichungen:

$$\Psi_0'' + \frac{2m}{\hbar}\left(E_0 - V\right)\Psi_0 = 0 \qquad (1)$$

$$\Psi_1'' + \frac{2m}{\hbar}\left(E_1 - V\right)\Psi_1 = 0 \qquad (2)$$

Aus $\int_0^\infty (1)\cdot\Psi_1 - (2)\cdot\Psi_0 \, dx$ und analoger Betrachtung mit

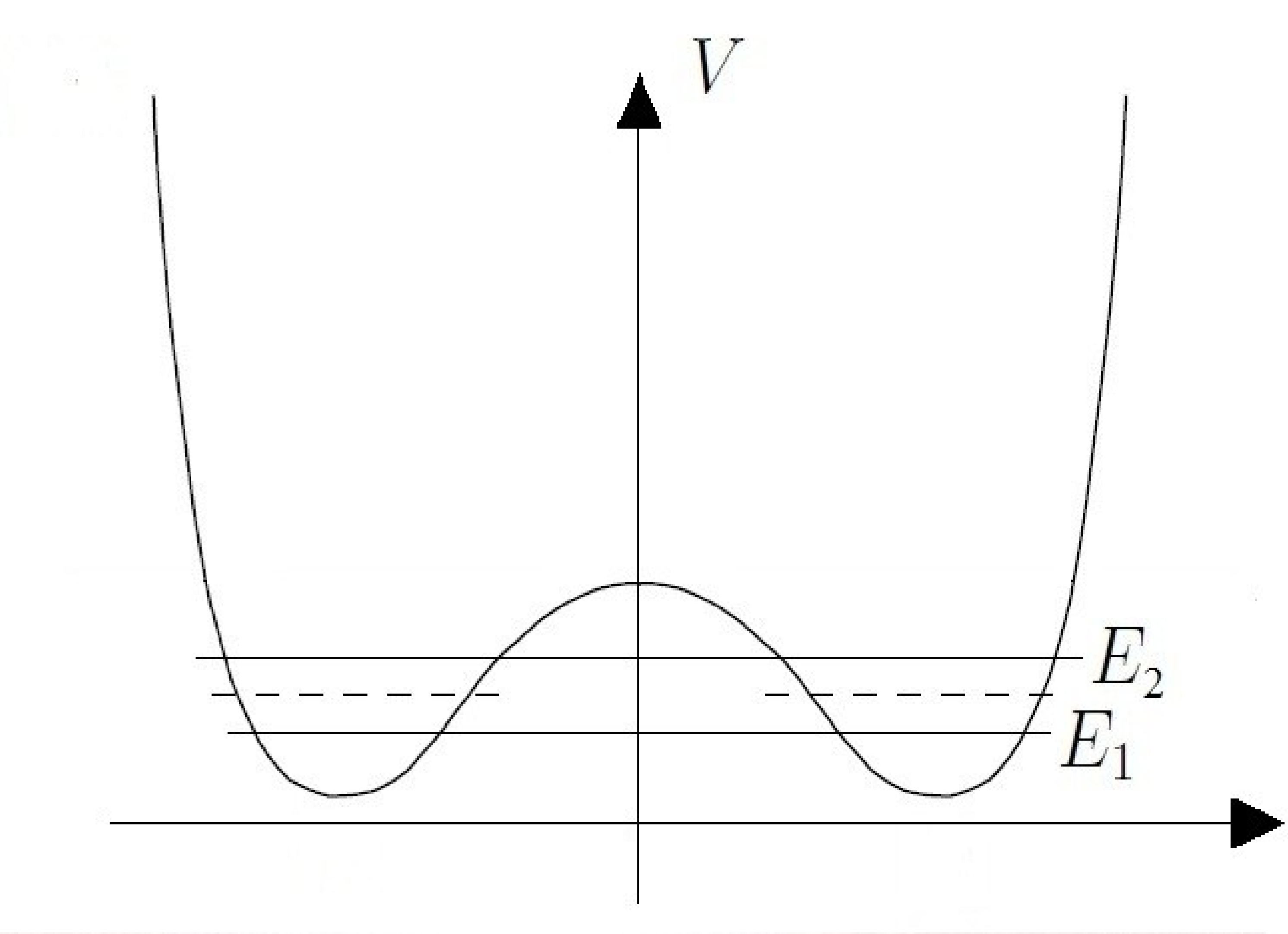
Ψ_0 und Ψ_2 können die Energien auf die Form

$$E_1 = \frac{\hbar\omega_0}{2} - \frac{\hbar}{2}\Delta$$

$$E_2 = \frac{\hbar\omega_0}{2} + \frac{\hbar}{2}\Delta$$

gebracht werden.

Daher folgt die Aufhebung der Entartung



Dynamik eines Wellenpakets

Annahme: Teilchen hält sich zum Zeitpunkt t=0 in der rechten Mulde auf

$$\rightarrow \quad |\Psi_R> \; = \; \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\Psi_1> + |\Psi_2>\right)$$

Für die Zeitentwicklung gilt

$$|\Psi(t)> \; = \; e^{\frac{-iHt}{\hbar}} \, |\Psi_R>$$

mit den Eigenwerten des Hamiltonoperators E_1 & E_2 erhält man

$$|\Psi(t)> \; = \; \frac{1}{\sqrt{2}} e^{\frac{-i\omega_0 t}{2}} \left[e^{\frac{it\Delta}{2}} |\Psi_1> + e^{\frac{-it\Delta}{2}} |\Psi_2> \right]$$

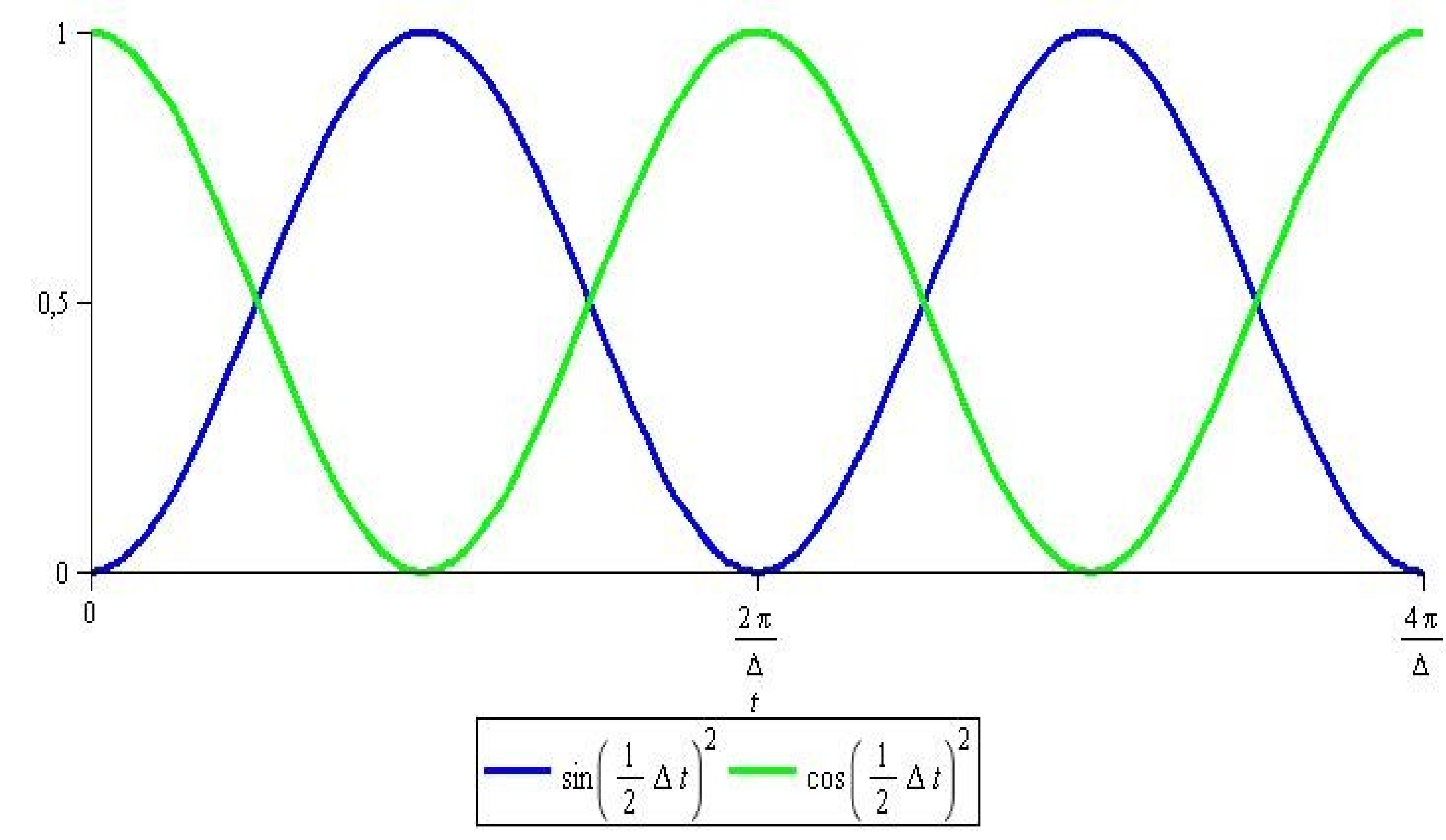
Kohärentes Tunneln

Die Wahrscheinlichkeit, dass der Zustand $\Psi_R(0)$ angenommen wird, ist

$$|\langle \Psi_R | \Psi(t) \rangle|^2 = \cos^2\left(\frac{t\Delta}{2}\right)$$

Analog kann man die Wahrscheinlichkeit für die linke Mulde berechnen

$$|\langle \Psi_L | \Psi(t) \rangle|^2 = \sin^2\left(\frac{t\Delta}{2}\right)$$


1
0,5
0
0
$\frac{2\pi}{\Delta}$
$\frac{4\pi}{\Delta}$
t
$\sin\left(\frac{1}{2}\Delta t\right)^2$
$\cos\left(\frac{1}{2}\Delta t\right)^2$

Hamiltonoperator

H in der Basis $|\Psi_1>$ und $|\Psi_2>$

$$|\Psi_1>=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \qquad |\Psi_2>=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

$$H = \frac{\hbar\omega_0}{2}I-\frac{\hbar\Delta}{2}\sigma_z=\begin{pmatrix}\frac{\hbar\omega_0}{2}-\frac{\hbar\Delta}{2} & 0\\ 0 & \frac{\hbar\omega}{2}+\frac{\hbar\Delta}{2}\end{pmatrix}$$

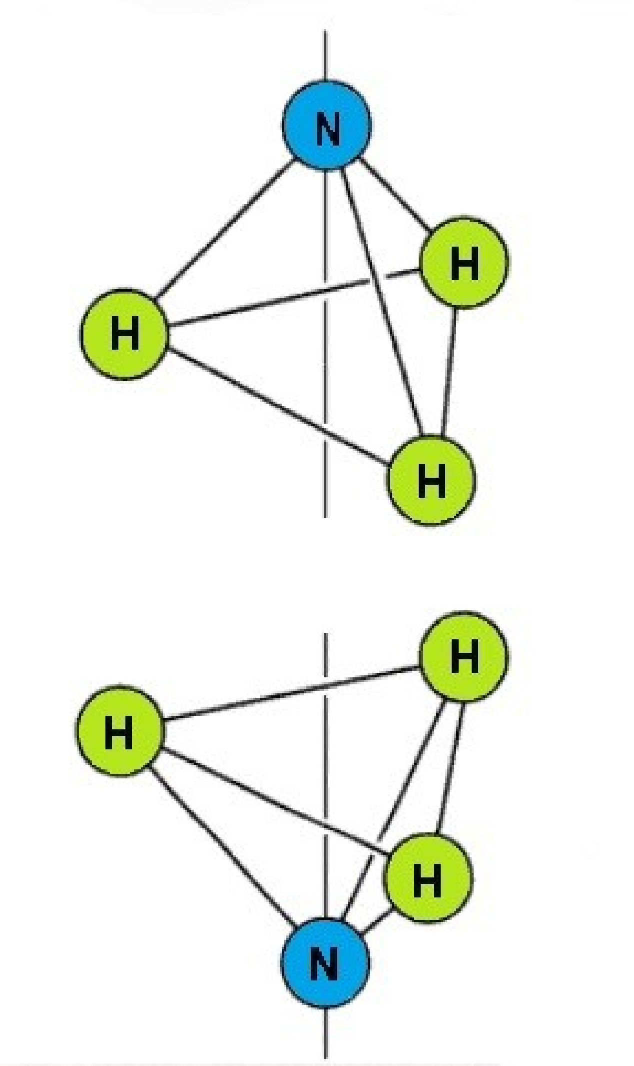
H in der Basis $|\Psi_L>$ & $|\Psi_R>$

$$|\Psi_L>=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} \qquad |\Psi_R>=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

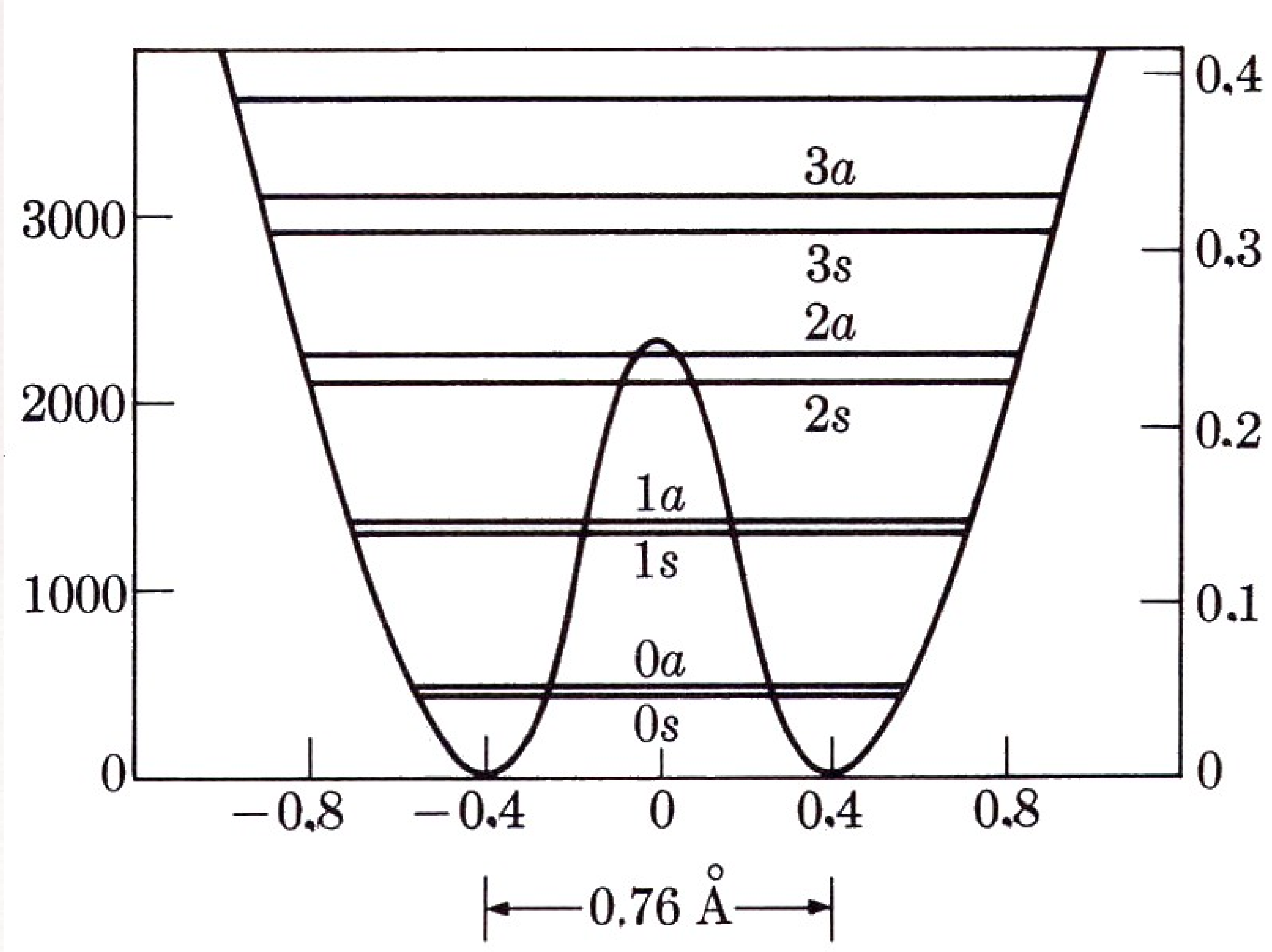
$$H=\frac{\hbar\omega_0}{2}I-\frac{\hbar\Delta}{2}\sigma_x=\begin{pmatrix}\frac{\hbar\omega_0}{2} & \frac{-\hbar\Delta}{2}\\ \frac{-\hbar\Delta}{2} & \frac{\hbar\omega_0}{2}\end{pmatrix}$$

Ammoniakmolekül

- NH_3
- 2 Konfigurationen möglich
- Beschreibung durch Doppeltopfpotential



• Energieaufspaltung im Experiment messbar



Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit

Quellen

Coherent tunnelling: On the level splitting of local ground states in a bistable potentials – H. Dekker (1986)

Instability of tunnelling and the concept of molecular structure in quantum mechanics: The case of pyramidal molecules and enantiomer problem – P. Claverie, G. Jona-Casimio (1986)

Macroscopic Quantum Coherence – R.A. Paju (2001)

Quantenmechanik Teil 1 – C. Cohen-Tannoudji

Lehrbuch der theoretischen Physik, Bd. 3, Quantenmechanik – Landau-Lifschitz