ulm university universität ulm

Institut für Theoretische Chemie:
Prof. Dr. Gerhard Taubmann und Sebastian Schnur

Mathematik II für Chemie und Wirtschaftschemie

Die Übungsblätter können von `http://www.uni-ulm.de/theochem/lehre` *heruntergeladen werden.*

Übungsblatt 3, verteilt am 7. 4. 2010, Übung am 14. 5. 2010

Aufgabe 1: *Taylorentwicklung einfacher Funktionen bis zur 4. Ordnung*

Geben Sie die Taylorentwicklung folgender Funktionen um x_0 bis zur 4. Ordnung an:

(a) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 2x + 5, \quad x_0 = 1$

(b) $g(x) = \dfrac{1}{1+2x}, \quad x_0 = 1$

(c) $g(x) = \sqrt{1+x}, \quad x_0 = 0$

(d) $h(x) = e^{2x}\sin(x+\pi), \quad x_0 = 0$

Aufgabe 2: *Taylorentwicklung einfacher Funktionen*

(a) Berechnen Sie die Taylorentwicklung

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

der Funktion $f(x) = \ln(1+x)$ um $x_0 = 0$.

(b) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Taylorreihe $\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$ mit Hilfe des Quotientenkriteriums:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = k$$

d.h. für welche Werte von x konvergiert die Reihe. Was gilt für $x = \pm 1$?

Aufgabe 3: *Elementare Taylorentwicklung*

Berechnen Sie die Taylor-Entwicklung von $f(x)$ um x_0 jeweils bis zur dritten Ordnung.

$$\begin{aligned} &\text{(a) } f(x) &=& \ \frac{1}{x} \qquad x_0 = 1 \\ &\text{(b) } f(x) &=& \ \ln(x) \qquad x_0 = 1 \end{aligned}$$

Aufgabe 4: *Elementare Taylorentwicklung*

Berechnen Sie die Taylor-Entwicklung der folgenden Funktionen bis zur 16. Ordnung:

$$\begin{aligned} &\text{(a) } f(x) &=& \ \exp(x^3) \qquad x_0 = 0 \\ &\text{(b) } f(x) &=& \ \cos(x^2) \qquad x_0 = 0 \end{aligned}$$

Aufgabe 5: *Taylorentwicklung per Integration*

Bestimmen Sie die Taylorreihe von $f(x) = \arctan(x)$ an der Stelle $x_0 = 0$, indem Sie zunächst die Reihe von $f'(x)$ mit Hilfe der geometrischen Reihe bestimmen und diese dann integrieren.
Wie lautet die Integrationskonstante?
Hinweis: Integration und Summation dürfen vertauscht werden.