



ulm university universität
uulm

Grundpraktikum Physik

Kommentierte Musterausarbeitung zum Versuch ψ

Freier Fall

Durchgeführt am 06.03.2020

von

Gruppe P43

Berthold Student und **Adele Studentin**
(berthold.student@uni-ulm.de) (adele.studentin@uni-ulm.de)

Betreuer: Prof. apl. Dr. Berndt Koslowski

Wir bestätigen hiermit, dass wir die Ausarbeitung selbständig erarbeitet haben und detaillierte Kenntnis vom gesamten Inhalt besitzen.

Berthold Student

Adele Studentin

Absichtliches Fälschen von Daten oder das Kopieren von Daten anderer Praktikumsgruppen verstößt gegen die Ethik der Wissenschaft. Es handelt sich hierbei um ein schweres Delikt (Betrug), das in keiner Form akzeptabel ist und daher mit dem sofortigen Ende des Praktikums geahndet wird. Das gesamte Praktikum muss dann zu einem späteren Zeitpunkt wiederholt werden.

Diese Musterausarbeitung lehnt sich eng an die von Dr. Wolfgang Limmer (Institut für Quantenmaterie) verfasste aus dem Jahre 2008 an.

Hinweis zur Fehlerbetrachtung: Auch die Physik unterliegt Sprachregelungen, die in den meisten Fällen sowohl der Klarheit der Sprache als auch der zugrunde liegenden Gedanken dienen. Es wird neuerdings empfohlen statt des Begriffs ‚Fehler‘ die ‚Unsicherheit‘ und statt der ‚Fehlerrechnung‘ bzw. der ‚Fehlerbetrachtung‘ die ‚Analyse der (Mess-)Unsicherheit‘ zu benützen. Vergleiche hierzu Web-Seiten der *Physikalisch Technischen Bundesanstalt* (...) und des *Bureau International des Poids et Mesures* (<https://www.bipm.org/en/publications/guides/gum.html>).

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung	4
2. Theoretische Grundlagen	4
2.1. Zusammenhang zwischen Falldauer und Fallhöhe	4
2.2. Regressionsgerade durch den Ursprung	5
3. Versuchsdurchführung und Auswertung	6
3.1. Versuchsaufbau	6
3.2. Messung der Falldauer bei konstanter Fallhöhe	6
3.3. Messung der Falldauer bei variabler Fallhöhe	9
4. Literaturverzeichnis	11
5. Anhang.....	11

1. Einleitung

Bei diesem Versuch sollen vor allem elementare Techniken des physikalischen Experimentierens erlernt und eingeübt werden. Dazu zählen: Aufbau einer Versuchsanordnung, Aufnahme von Messwerten, geeignete grafische Auftragung der Messwerte, grafische und numerische Auswertung, und Abschätzung und Berechnung von Messunsicherheiten. Als physikalisches Objekt dient dazu der freie Fall einer Eisenkugel, dessen Falldauer T im Schwerfeld der Erde als Funktion der Fallhöhe h gemessen wird. Aus dem theoretisch herzuleitenden Zusammenhang zwischen T und h und den Messdaten ist schließlich der funktionale Zusammenhang zu prüfen und die Erdbeschleunigung g zu bestimmen, wobei die Fehler geeignet zu betrachten sind.

Erläuterungen sind durch eingerahmten Text hervorgehoben.

2. Theoretische Grundlagen

2.1. Zusammenhang zwischen Falldauer und Fallhöhe

Eine zunächst ruhende Kugel der Masse m werde im Schwerfeld der Erde zum Zeitpunkt $t = 0$ aus einer Anfangshöhe h fallen gelassen (siehe Abb. 1).

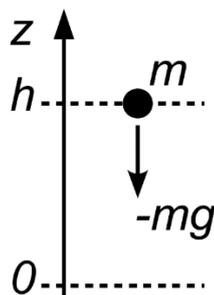


Abbildung 1: Kugel der Masse m im Schwerfeld der Erde.

Die momentane Höhe z als Funktion der Zeit t lässt sich mit Hilfe des 2. Newton'schen Axioms aus

$$m \frac{d^2z}{dt^2} = -mg \quad (1)$$

berechnen, wobei g die Erdbeschleunigung bezeichnet. Die allgemeine Lösung von Gl. (1) lautet

$$z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t + z_0, \quad (2)$$

mit der Anfangshöhe z_0 und der Anfangsgeschwindigkeit v_0 . Wegen der Anfangsbedingungen

$$z_0 = h \quad \text{und} \quad v_0 = 0 \quad (3)$$

vereinfacht sich Gleichung (2) zu

$$z(t) = h - \frac{1}{2}gt^2. \quad (4)$$

Der Zusammenhang zwischen Falldauer T und Fallhöhe h ergibt sich aus Gleichung (4) und

$$z(T) = h - \frac{1}{2}gT^2 = 0 \quad (5)$$

zu

$$T = \sqrt{\frac{2h}{g}}. \quad (6)$$

- Alle wichtigen Gleichungen und solche, auf die im Text Bezug genommen wird, müssen fortlaufend nummeriert werden.
- Alle physikalischen Größen und Symbole müssen im Text definiert und in der gesamten Ausarbeitung einheitlich und konsistent verwendet werden.
- Es ist nicht immer sinnvoll, Formeln und deren Herleitung in allen Details in der Ausarbeitung wiederzugeben (insbesondere bei sehr umfangreichen Herleitungen). In diesen Fällen kann auch auf Standardlehrbücher verwiesen werden, dann aber mit Angabe des Kapitels und der Nummer der Gleichung(en).

2.2. Regressionsgerade durch den Ursprung

Besteht zwischen zwei Messgrößen x und t eine lineare Beziehung

$$y = v \cdot t, \quad (7)$$

und trägt man die Messwerte y_i ($i=1, \dots, N$) graphisch über t_i auf, so erhält man v aus der Steigung der Ausgleichsgeraden. Mit Hilfe der linearen Regression lässt sich nach dem Prinzip der kleinsten Fehlerquadrate

$$f(v; N) = \sum_{i=1}^N (y_i - v \cdot t_i)^2 \quad (8)$$

eine Ausgleichsgerade berechnen (hier ist dann tatsächlich der Schnitt mit dem Ursprung, d.h. $y = 0$ für $t = 0$, Teil des *Modells!*). Aus der Forderung, dass diese Summe minimal sei, ergibt sich

$$\frac{d}{dv} f(v; N) = \sum_{i=1}^N 2(y_i - v \cdot t_i)(-t_i) = 2[v \sum_{i=1}^N t_i^2 - \sum_{i=1}^N y_i t_i] = 0 \quad (9)$$

und es folgt nach länglicher Rechnung (unter Ausnutzung der linearen Algebra!)

$$v = (\sum_{i=1}^N y_i t_i) (\sum_{i=1}^N t_i^2)^{-1}. \quad (10)$$

Man beachte, dass v natürlich eine fehlerbehaftete Größe sein muss! Dieser ergibt sich bei allgemeiner Betrachtung der linearen Regression aus:

$$\delta v = \sqrt{\frac{N}{\Delta} \sigma_y^2} \text{ mit } \sigma_y^2 = \frac{\sum_{i=1}^N (y_i - \bar{y})^2}{N-1}, \Delta = N \sum_{i=1}^N t_i^2 - \left(\sum_{i=1}^N t_i\right)^2, \text{ und } \bar{y} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i.$$

Siehe hierzu z.B. auch <https://lp.uni-goettingen.de/get/text/5826>. Der Überstrich (gesprochen: quer) wird in der Physik gerne als Abkürzung für das arithmetische Mittel verwendet.

3. Versuchsdurchführung und Auswertung

3.1. Versuchsaufbau

Eine Eisenkugel der Masse $m = 0.5 \text{ kg}$ ist mithilfe einer stromdurchflossenen Spule an einer höhenverstellbaren Halterung fixiert. Durch Unterbrechung des Stromkreises (Tastschalter) wird die Befestigung gelöst und die Kugel fällt unter Einfluss der Schwerkraft (Erdbeschleunigung g) frei zu Boden. Die Falldauer T wird manuell mit einer gewöhnlichen Stoppuhr gemessen. Abbildung 2 zeigt schematisch den Versuchsaufbau.

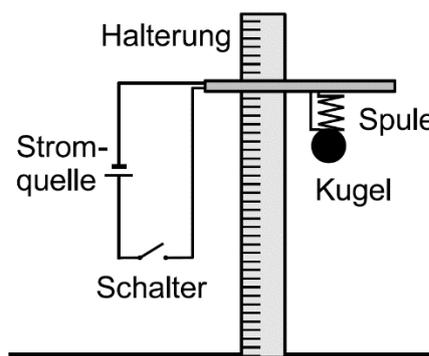


Abbildung 2: Schematische Skizze des verwendeten Versuchsaufbaus.

3.2. Messung der Falldauer bei konstanter Fallhöhe

Im ersten Teil des Versuches wurde zunächst bei fester Fallhöhe h die Falldauer T aus einer Messreihe von 20 Einzelmessungen bestimmt. Ablesen von h auf der Höhenskala (das ist eine Einzelmessung) ergibt

$$h = \bar{h} \pm \Delta h = 540.0 \text{ cm} \pm 1.0 \text{ cm}. \quad (11)$$

Tabelle 1: Messreihe von $N = 20$ Einzelmessungen der Falldauer T .

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
T_i (s)	1.05	1.10	1.05	1.07	1.09	1.08	1.12	1.06	1.03	0.98
i	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
T_i (s)	1.06	1.07	1.01	1.09	1.08	1.07	1.05	1.00	1.03	1.11

- Zu jeder Tabelle gehört eine Tabellenüberschrift.
- Auf Tabellen muss im Text verwiesen werden.
- Experimentell ermittelte Abhängigkeiten sollen nicht (nur) als Tabelle, sondern (auch) als Diagramm dargestellt werden.
- Hier haben wir das erste Mal Einheiten: Einheiten werden nicht kursiv geschrieben und durch ein (kurzes) Leerzeichen von der Zahlenangabe getrennt.

Aus den Messwerten in Tabelle 1 ergibt sich das arithmetische Mittel

$$\bar{T} = \frac{1}{N} \sum_i T_i = 1.05950 \text{ s.} \quad (12)$$

Für die empirischen Fehler des Mittels erhalten wir

$$\delta\bar{T} = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=1}^N (T_i - \bar{T})^2} = 0.007996 \text{ s.} \quad (13)$$

Gemäß der Praktikumsanleitung [1] ergibt sich im Falle der Gauss'schen Normalverteilung der Messwerte für die Messunsicherheit (wahrer Wert von T liegt mit einer Wahrscheinlichkeit von 68% im Bereich von $\bar{T} \pm \Delta T$)

$$\Delta T = t_{0.68} \cdot \delta\bar{T} = 1.03 \cdot 0.007996 \text{ s} = 0.00824 \text{ s.}$$

Das Ergebnis für die Falldauer T lautet also einschließlich der Unsicherheit

$$T = \bar{T} \pm \Delta T = (1.060 \pm 0.009) \text{ s.} \quad (15)$$

Auf wie viele Ziffern bzw. Stellen hinter dem Komma sollen die Werte von \bar{T} und ΔT angegeben werden? Dazu gibt es eine klare Regel:

Zunächst sucht man bei ΔT von links beginnend die erste Ziffer ungleich Null. Liegt diese Ziffer zwischen 3 und 9, dann ist die zugehörige Stelle auch die Rundungsstelle. Ist die Ziffer jedoch 1 oder 2, dann liegt die Rundungsstelle rechts daneben. Sowohl ΔT als auch \bar{T} werden dann auf diese Stelle gerundet, wobei ΔT im Gegensatz zu \bar{T} immer aufgerundet wird.

Diese Regel gilt sowohl für Einzelmessungen als auch Mittelwerte und deren Fehler, wenn die Anzahl der Einzelmessungen (N) nicht sehr hoch ist. Gilt $N \gg 100$, wird es sinnvoll den Fehler des Mittels grundsätzlich auf 2 Stellen genau anzugeben (Hinweis: dies ergibt sich für eine Normalverteilung aus $\Delta(\Delta T) \approx \frac{1}{\sqrt{2N}} \Delta T$).

Eine alternative und kürzere Notation für den Fehler in Gleichung (15) ist:

$$T = \bar{T} = 1.060(9) \text{ s.}$$

Hier bedeutet die einfache 9 in Klammern, dass der Fehler in der letzten angegebenen Ziffer 9 beträgt, also 0.009. Werden mehrere Ziffern in Klammern angegeben, bezieht sich der Fehler auf die entsprechenden letzten Ziffern; Bsp.: $1.060(19) = 1.060 \pm 0.019$

Verwendet man hingegen für eine grobe Abschätzung von ΔT die empirische mittlere Abweichung, so erhält man

$$\Delta T' = \frac{1}{N} \sum_i |T_i - \bar{T}| = 0.02760 \text{ s} \quad (16)$$

und damit

$$T' = \bar{T} \pm \Delta T' = (1.060 \pm 0.028) \text{ s.} \quad (17)$$

Für eine grobe Abschätzung von ΔT wird eben manchmal, insbesondere bei einer sehr geringen Anzahl von Stichproben (Messwerten) $N \leq 5$, auch die empirische mittlere Abweichung gemäß (16) verwendet. Es gilt näherungsweise der Zusammenhang $\Delta T' = \frac{4}{5} \delta \bar{T} \cdot \sqrt{N-1}$. Allerdings sollte man sich dabei immer über die unterschiedlichen Bedeutungen von $\Delta T'$ und ΔT bzw. $\delta \bar{T}$ im Klaren sein und die Methode der Fehlerbetrachtung mit dem Betreuer absprechen. Systematische Abweichungen werden durch obige Betrachtung außer Acht gelassen. Sie müssen ggf. geschätzt und in obige Betrachtung einbezogen werden, typischerweise durch Addition.

Die Erdbeschleunigung g lässt sich nun nach Gl. (6) aus

$$g = \frac{2h}{T^2} \quad (18)$$

berechnen. Einsetzen von (11) und (12) liefert

$$\bar{g} = 9.6120 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}. \quad (19)$$

Die Unsicherheit Δg ergibt sich mit Hilfe der Größtfehlerabschätzung zu

$$\Delta g' = \left| \frac{\partial g}{\partial h} \Delta h \right| + \left| \frac{\partial g}{\partial T} \Delta T' \right| = \frac{2}{T^2} \Delta h + \frac{4\bar{h}}{T^3} \Delta T'. \quad (20)$$

Im Allgemeinen ist für die Berechnung von Δg das Gauss'sche Fehlerfortpflanzungsgesetz $\Delta g = \sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial h} \cdot \Delta h\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial T} \cdot \Delta T\right)^2}$ vorzuziehen. Voraussetzung hierfür ist, dass die Annahme einer normalverteilten Statistik vernünftig ist. Auch das spricht man mit dem Betreuer ab.

Einsetzen von (11) und (15) in (20) liefert

$$\Delta g' = (0.0178 + 0.1632) \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 0.1810 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}. \quad (21)$$

Das Endergebnis für g lautet somit

$$g = \bar{g} \pm \Delta g' = (9.61 \pm 0.19) \frac{\text{m}}{\text{s}^2}. \quad (22)$$

Der Literaturwert ist $g = 9.807 \text{ m/s}^2$ [2]. Nach Gl. (21) resultiert der größte Beitrag zu $\Delta g'$ aus der Messunsicherheit $\Delta T'$.

3.3. Messung der Falldauer bei variabler Fallhöhe

Im zweiten Teil des Versuchs wurde nun die Falldauer T als Funktion der (variablen) Fallhöhe h gemessen, um die Abhängigkeit gemäß Gl. (6) zu prüfen. Zu jedem h wurde T aus einer Einzelmessung ermittelt. Die Messwerte sind in Tabelle 2 aufgelistet.

Tabelle 2: Gemessene Werte für die Falldauer T als Funktion der Fallhöhe h .

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
h_i (m)	6.2	5.8	5.4	5.0	4.6	4.2	3.8	3.4	3.0
T_i (s)	1.11	1.11	1.06	0.99	1.0	0.95	0.87	0.82	0.80
T_i^2 (s ²)	1.23	1.23	1.12	0.98	1.00	0.90	0.76	0.67	0.64
ΔT_i^2 (s ²)	0.22	0.22	0.21	0.20	0.20	0.19	0.17	0.16	0.16

Nach Gl. (6) gilt $T \propto \sqrt{h}$. Zur graphischen Darstellung von g ist daher in folgender Abbildung zur Linearisierung der Beziehung T^2 über h aufgetragen.

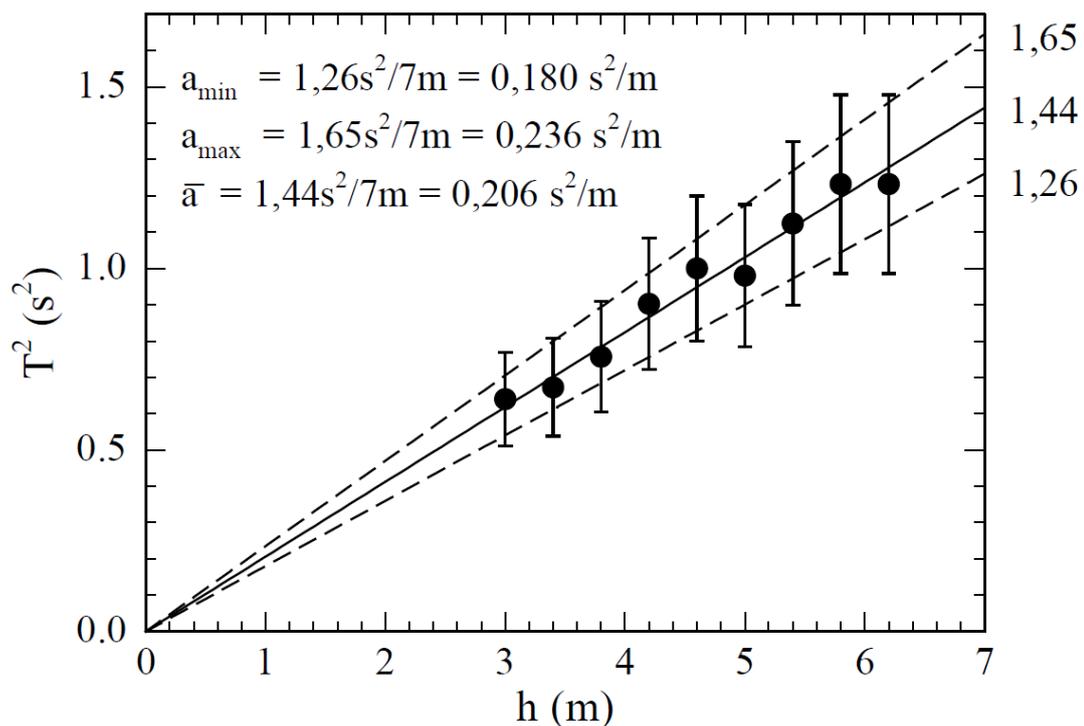


Abbildung 3: Falldauer T als Funktion der Fallhöhe h in linearisierter Darstellung.

- Das Auge nimmt nun 'mal Abweichungen von der Geraden besonders gut wahr. Daher wählt man gerne linearisierte Darstellungen.
- Formeln werden nicht wiederholt!
- Zu jeder Abbildung gehört eine Bildunterschrift.
- Auf Abbildungen muss im Text verwiesen werden.
- Symbole in Diagrammen müssen ausreichend groß sein.

- Die Schriftgröße in Diagrammen und Abbildungen so wählen, dass die Beschriftung (auch nach einer möglichen Verkleinerung des Bildes) noch gut lesbar ist.
- Wenn Messung und Theorie gut übereinstimmen, ist gegebenenfalls ein zusätzliches Diagramm mit den Residuen erforderlich.
- Achsenbeschriftung in Diagrammen mit Einheiten: W (Nm), nicht: W [Nm]
- Logarithmische Größe: $\log(W/\text{Nm})$, nicht: $\log(W)$

Bezeichnen wir die Steigung der resultierenden Geraden mit a , so gilt

$$T^2 = \frac{2}{g} h = a \cdot h \quad \Rightarrow \quad g = \frac{2}{a}. \quad (23)$$

Für die Unsicherheit der Einzelmessung schätzen wir grob ab:

$$\Delta T = 0.1 \text{ s}. \quad (24)$$

Die Unsicherheit für T^2 in Abbildung 3 ergibt sich aus der Fehlerfortpflanzung zu

$$\Delta(T^2) = \frac{d}{dT} T^2 \cdot \Delta T = 2T \cdot \Delta T. \quad (25)$$

Aus der Steigung der Ausgleichsgeraden in Abb. 3 und den beiden Grenzgeraden erhalten wir mit Gl. (23) zu

$$\bar{g} = 9.722 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \quad (26)$$

und
$$g_{\min} = \frac{2}{a_{\max}} = 8.485 \text{ m/s}^2, \quad g_{\max} = \frac{2}{a_{\min}} = 11.111 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}. \quad (27)$$

Mit

$$\Delta g = \frac{1}{2} (g_{\max} - g_{\min}) = 1.313 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \quad (28)$$

Folgt

$$g = \bar{g} \pm \Delta g = (9.7 \pm 1.4) \frac{\text{m}}{\text{s}^2}. \quad (29)$$

Die Bestimmung von g in diesem Versuchsteil hätte wesentlich genauer erfolgen können, hätte man für jede Fallhöhe anstatt einer Einzelmessung eine Messreihe für T durchgeführt (vgl. Kap. 3.2.).

Für die Steigung der Regressionsgeraden ergibt sich nach Gl. (10)

$$\sigma = \frac{\sum_i T_i^2 h_i}{\sum_i h_i^2} = 0.21 \frac{\text{s}^2}{\text{m}}. \quad (30)$$

Für g folgt daraus

$$g = 9.70 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}. \quad (31)$$

4. Literaturverzeichnis

[1] Wolfgang Limmer, *Praktikumsanleitung*, WS 2008/09.

[2] Horst Kuchling, *Taschenbuch der Physik*, (Fachbuchverlag Leipzig im Carl Hanser Verlag, München, 1996).

5. Anhang

Messprotokoll

- In der Ausarbeitung muss im Anhang ein Protokoll der Messungen beigelegt werden, das die originalen Aufschriebe enthält. Bei sehr vielen Messdaten (z.B. im FP) kann auch eine CD verwendet werden.
- Auf keinen Fall dürfen die Messergebnisse vor dem Ende des Praktikums gelöscht werden.
- Im Hauptteil der Ausarbeitung sollten keine langen Tabellen von Messwerten präsentiert werden. Dies verschlechtert die Lesbarkeit des Textes. Eine graphische Darstellung der Messwerte ist hier vorzuziehen. Ist der Abdruck einer langen Liste unbedingt nötig, dann sollte dies im Anhang geschehen (hierfür gibt es die Verweise!).

Weitere Kommentare:

Laborbuch:

- Es wird dringend empfohlen, die Versuchsprotokolle im Laborbuch zu führen. Hierzu gehören auch Skizzen und Notizen. Eine Kopie davon kann der Ausarbeitung beigelegt werden.

Zitate:

- Bei fremdem Text- und Bildmaterial muss neben der direkten Bezugsquelle auch die Originalquelle zitiert werden.
- Zitate aus Wikipedia werden nicht generell abgelehnt, aber es muss die volle URL mit Zeitpunkt des Aufrufs angegeben werden.

- Wörtliche Zitate sind in einzelnen Sätzen erlaubt, aber die wörtliche Wiedergabe von ganzen Absätzen ist nicht erwünscht bzw. hier im Anfängerpraktikum sogar untersagt. Sie sollen Inhalte mit eigenen Worten wiedergeben.
- Im Fortgeschrittenenpraktikum ist Wikipedia als Ausgangspunkt erlaubt, aber es sollen erstlinig Lehrbücher, Bibliothekswerkzeuge und Datenbanken zur Informationsbeschaffung und Recherche genutzt werden.

Rechtschreibung:

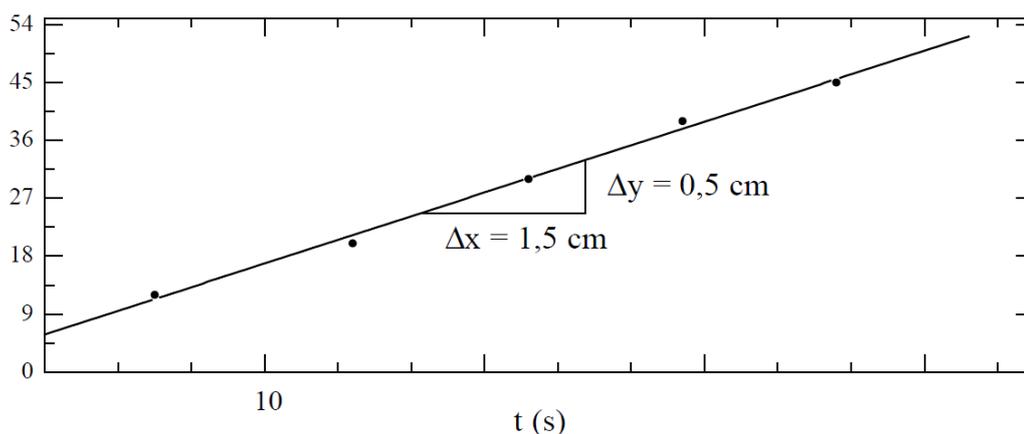
- Vor der Abgabe der Ausarbeitung ist der Text sorgfältig auf Rechtschreibfehler zu prüfen. Wir bewerten die Rechtschreibung zwar nicht, aber der Text muss leserlich sein.

Sonstiges:

- Zur Rückgabe der Ausarbeitungen muss die ganze Gruppe anwesend sein. Wie sonst könnte man nötige Korrekturen besprechen?!
- Die Ausarbeitungen müssen eine geschlossene Einheit bilden, auch wenn Teile davon von verschiedenen Mitgliedern der Gruppe angefertigt werden.

Wie sollten Diagramme nicht aussehen?

Beispiel: In einem Diagramm soll der gemessene Ort x in Metern (m) über der Zeit t in Sekunden (s) aufgetragen werden. Die Ausführung in der folgenden Abbildung ist völlig inakzeptabel:



Mängel:

- Die Zeichnung und die Beschriftung sind zu klein, das Format ist ungünstig.
- Die Messpunkte sind zu klein markiert und es fehlen die Fehler(balken).

- An der Ordinate fehlen die Bezeichnung und die Einheiten der dargestellten Größe, nämlich x (m), und an der Abszisse fehlt größtenteils die Beschriftung der Skala.
- Es fehlt die Bildunterschrift.
- Die Skaleneinteilung ist extrem unbequem. Man versuche z.B. den Messpunkt ($x = 27.5$ m, $t = 18.5$ s) einzutragen!
- Das Dreieck zur Bestimmung der Steigung ist zu klein (Ablesefehler!), die verwendeten Bezeichnungen Δx und Δy passen nicht zu den Größen t und x , und die Angabe geometrischer Längen, nämlich $\Delta x = 1.5$ cm und $\Delta y = 0.5$ cm, ist unsinnig. Benötigt werden Δt und Δx in den Einheiten s und m! Die Größe des Steigungsdreiecks sollte im Übrigen so gewählt werden, dass die Werte für Δt und Δx leicht ablesbar sind und dass durch den Wert von Δt leicht geteilt werden kann, z.B. $\Delta t = 40$ s.