

Berechnung des Solvenzkapitals für eine vereinfachte fondsgebundene Lebensversicherung

Michael Kochanski

Preprint Series: 2009-12



Fakultät für Mathematik und Wirtschaftswissenschaften
UNIVERSITÄT ULM

Berechnung des Solvenzkapitals für eine vereinfachte fondsgebundene Lebensversicherung

Michael Kochanski

27. Juli 2009

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	3
2	Das Modell	4
2.1	Das Produkt - eine vereinfachte FLV	4
2.2	Modellannahmen	4
2.3	Kapitalmarktmodell	5
2.4	Risiken des Versicherungsunternehmens	6
2.4.1	market risk	6
2.4.2	life underwriting risk	6
2.5	Kalibrierung der Volatilität	7
2.6	Die Aktivseite des Versicherers	7
2.7	Zusammenhang zwischen Kapitalmarkt und Storno	8
2.8	Anforderungen an eine Stornofunktion	11
2.9	Kalibrierung der Stornoraten	12
2.10	Stornofunktionen	14
2.10.1	Treppenfunktionen als Stornofunktionen	15
2.10.2	Lineare Stornofunktionen	17
2.10.3	Stetige nichtlineare Stornofunktionen	22
3	Berechnung der BEL	25
3.1	Prämien	29
4	Berechnung des SCR	30
4.1	Die SCR-Formel	30
4.1.1	SCR_{int}	30
4.1.2	SCR_{eq}	32
4.1.3	SCR_{mort}	34
4.1.4	SCR_{lapse}	35
4.1.5	SCR_{mkt}	37
4.1.6	SCR_{life}	38
4.1.7	SCR	39
5	Sensitivitätsanalyse	40
5.1	Kalibrierungsfehler	41
5.2	Deterministische Stornorate	44
5.3	Laufzeit	45
5.4	Asset-BEL-Verhältnis	46
6	Zusammenfassung	49
	Literaturverzeichnis	50

1 Einleitung

Die vorliegende Arbeit untersucht Methoden zur Bewertung von Versicherungsprodukten sowie Auswirkungen dieser auf das Solvenzkapital. Solvency II fordert, dass eine Bewertung zu Marktpreisen (mark to market) einer modellgestützten Bewertung (mark to model) vorzuziehen ist¹. Im Allgemeinen werden Versicherungsprodukte nicht gehandelt, es bestehen also keine liquiden Märkte und somit auch keine Marktpreise. Allerdings enthalten Versicherungsprodukte Optionen und Garantien, denen ein Marktwert zugeordnet werden kann. Bei der Bewertung dieser Produkte ist eine Aufteilung in einen hedgebaren Teil, dem ein Marktwert zugeordnet wird, und einen nicht-hedgebaren Teil, dessen Wert anhand eines Modells bestimmt wird, nach Solvency II aus folgenden Gründen erwünscht²: Es wird angenommen, dass Marktpreise eine höhere Aussagekraft haben als Modellpreise. Eine Aufteilung bedeutet auch eine Vereinfachung (Proxy) der Berechnung.

Dieses Vorgehen soll an einer vereinfachten fondsgebundenen Lebensversicherung demonstriert werden. Dabei sollen insbesondere mögliche Risiken einer Aufteilung untersucht werden³. Es wird zunächst eine Verbindung zwischen dem Kapitalmarkt und dem Stornoverhalten des Versicherungsnehmers unterstellt und mathematisch in Form von Stornofunktionen dargestellt. Es folgt eine Überprüfung auf Konsistenz zu Annahmen für Lebensversicherungsprodukte nach Solvency II sowie Auswirkungen auf wichtige Kennzahlen wie BEL und SCR. Die vorliegende Arbeit soll die Frage beantworten, ob, und wenn ja, zu welchen Bedingungen, eine Aufteilung zur Bewertung der betrachteten vereinfachten fondsgebundenen Lebensversicherung möglich ist.

Ausgehend von Simulationen von Kapitalmarktverläufen und unter Verwendung der Stornofunktionen werden Szenarien für mögliche Stornoraten erzeugt. Die Kennzahlen BEL und SCR werden ebenso wie die Entwicklung der Prämieinnahmen, Assets und des Bestandes für jedes einzelne Szenario berechnet. Die erzeugten Werte werden mit denen des deterministischen Modells mit einer vom Kapitalmarkt unabhängigen Stornorate verglichen.

¹Vgl. dazu [EUR08b, Seite 9].

²Vgl. dazu [EUR08b, Seite 13-16] sowie [The06, Seite 15] und [Pel08, Example 2].

³Eine derartige Untersuchung wurde durch die Kritik an der Aufteilung von Versicherungsprodukten in hedgeable und non-hedgeable in einer Veröffentlichung von Marcus Kriele und Jochen Wolf [KW07, Seite 199-200] motiviert.

2 Das Modell

2.1 Das Produkt - eine vereinfachte FLV

Die hier betrachtete fondsgebundene Lebensversicherung ist folgendermaßen gestaltet:

- Auszahlung im Todesfall: Wert des Investmentfonds + Versicherungssumme
- Auszahlung im Erlebensfall: Wert des Investmentfonds
- Auszahlung bei Storno: Wert des Investmentfonds

Ein solches Produkt kann als Fondssparplan mit Risikolebensversicherung aufgefasst werden. Dabei wird ein Teil der eingenommenen Beiträge zur Finanzierung der Risikolebensversicherung verwendet.

Sonstige Vertragsdetails:

- Beitragszahlungen erfolgen als Einmalprämie
- Storno ist nur zum Ende eines Jahres möglich
- Todesfalleistung erfolgt zum Ende eines Jahres

2.2 Modellannahmen

Es gelten zusätzlich folgende Modellannahmen:

- keine Kosten
- Versicherungsnehmer sind identisch in Alter und Geschlecht
- Anzahl der Versicherungsnehmer: 10000
- Versicherer betreibt kein Neugeschäft⁴

⁴So auch vorgeschlagen vom GDV [GDV05, Seite 22].

2.3 Kapitalmarktmodell

Die in Abschnitt 2.2 eingeführten Annahmen werden nun durch ein Kapitalmarktmodell ergänzt⁵.

Der risikolose Zinssatz r ist in jeder Periode konstant, darf aber von Periode zu Periode schwanken. Der kontinuierliche Zinssatz wird mit δ bezeichnet. Es gilt:

$$1 + r = e^\delta \quad (1)$$

Neben der risikolosen Anlage gibt es ein risikobehaftetes Asset (der Investmentfonds) S_t dessen Wert durch folgende stochastische Differentialgleichung beschrieben wird⁶:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t \quad (2)$$

mit konstantem Drift μ und konstanter Volatilität σ sowie der geometrischen Brownschen Bewegung W_t .

S_t lässt sich nun berechnen mit

$$S_t = S_{t-1} \exp \left(\int_{t-1}^t \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) ds + \int_{t-1}^t \sigma dW_s \right) \quad (3)$$

Unter Verwendung des risikoneutralen Maßes Q kann Gleichung 3 umgeschrieben werden zu⁷:

$$\begin{aligned} S_t &= S_{t-1} \exp \left(\int_{t-1}^t \left(\delta - \frac{\sigma^2}{2} \right) ds + \int_{t-1}^t \sigma d\tilde{W}_s \right) \\ &= S_{t-1} \exp \left(\delta - \frac{\sigma^2}{2} + \sigma \epsilon \right) \quad \text{mit } \epsilon \sim \mathcal{N}(0, 1) \end{aligned} \quad (4)$$

⁵Vgl. dazu [Kli07, Seite 32-34] sowie [Kli07, Seite 46-47].

⁶Diese wird auch als das Standard-Black-Scholes-Modell bezeichnet (vgl. [Kli07, Seite 32] sowie [GDV05, Seite 43-44 und 115-122]). Der für μ angenommene Wert orientiert sich am Vorschlag des GDV und liegt 3,5% über dem risikofreien Zins.

⁷Vgl. dazu [Shr00, Seite 214-215].

2.4 Risiken des Versicherungsunternehmens

Der Versicherer ist durch den Vertrieb der hier beschriebenen vereinfachten fondsgebundenen Lebensversicherung hauptsächlich zwei verschiedenen Risiken ausgesetzt – dem „market risk“ und dem „life underwriting risk“.

Im Folgenden werden diese Risiken erläutert sowie die durch die dazugehörigen Stressszenarien, wie in QIS 4 definiert, benannt.

2.4.1 market risk

„**interest rate risk**“⁸ – Beim Zinsrisiko werden zwei Stressszenarien angenommen: Eine Verschiebung der Zinskurve nach oben bzw. nach unten. Das Ausmaß der Zinsveränderungen ist der entsprechenden Tabelle in QIS 4 zu entnehmen.

„**equity risk**“⁹ – Im Kapitalmarkt-Stressszenario wird der Versicherer mit einem einmaligen Kurssturz zu Beginn der betrachteten Periode von 32% konfrontiert¹⁰.

2.4.2 life underwriting risk

„**mortality risk**“¹¹ – Die Berücksichtigung des Sterblichkeitsrisikos ist bei der im Folgenden vorgenommenen Untersuchung nicht notwendig. Das Sterblichkeitsrisiko dient im vorliegenden Modell allerdings zur Einordnung der quantitativen Veränderungen des Solvenzkapitals verursacht durch das Stornorisiko. Das Stressszenario sieht eine Erhöhung der Sterblichkeitsraten („mortality rates“) um 10% vor.

„**lapse risk**“¹² – Das Stornorisiko umfasst drei Stressszenarien: Eine langfristige Erhöhung oder Senkung der Stornorate um jeweils die Hälfte und ein einmaliges massives Storno von 30% des Bestandes.

⁸Vgl. [EUR08b, Seite 134-137].

⁹Vgl. [EUR08b, Seite 137-143].

¹⁰Es wird angenommen, dass es sich um Kapitalanlagen der Kategorie „Global“ handelt. Das vorliegende Stressszenario wurde im Zuge der QIS 4 als zu mild kritisiert und es wurde ein Kurssturz von 40% vorgeschlagen (vgl. [EUR08a, Seite 12, 176 und 187]).

¹¹Vgl. [EUR08b, Seite 162-164].

¹²Vgl. [EUR08b, Seite 167-169].

2.5 Kalibrierung der Volatilität

Das in 2.4.1 definierte Stressszenario für den Kapitalmarkt soll ein 200-Jahr-Ereignis beschreiben, d.h.: ein Ereignis, dass nur in 0,5% aller Fälle eintritt¹³. Diese Information kann nun genutzt werden, um eine Volatilität für den Kapitalmarkt zu berechnen. Allerdings ist das Eintreten des Stressszenarios unmittelbar, während der VaR-Ansatz sich auf einen Zeitraum von einem Jahr bezieht: „The capital charge is determined as the immediate effect on the net value of asset and liabilities expected in the event of the stress scenario equity shock“¹⁴. Für die Kalibrierung, nicht aber für die Berechnung des Solvenzkapitals, bleibt die Unmittelbarkeit des Stressszenarios unberücksichtigt. Voraussetzung ist darüberhinaus die Annahme, dass die Entwicklung des Kapitalmarktes anhand des oben vorgestellten Kapitalmarktmodells erfolgt. Die Rendite ist also lognormalverteilt und für das 0,005-Quantil gilt¹⁵:

$$\begin{aligned} 0,68 S_0 &= S_0 \exp\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} + z_{0,005}\sigma\right) \\ 0 &= \frac{\sigma^2}{2} - z_{0,005}\sigma + \ln(0,68) - \mu \end{aligned} \quad (5)$$

Diese einfache quadratische Gleichung hat nun folgende Lösung:

$$\sigma = z_{0,005} + \sqrt{(-z_{0,005})^2 - 2(\ln(0,68) - \mu)} \quad (6)$$

2.6 Die Aktivseite des Versicherers

Der Versicherer kann im Modell festlegen, mit welchen Kapitalanlagen das Portfolio, das die Aktivseite repräsentiert, bestückt wird. Der Wert $ER = 0,3$ gibt zum Beispiel an, dass das Portfolio zu 30% aus Aktien und zu 70% aus Staatsanleihen besteht. Die Aktivseite wird durch das Investmentfondsguthaben der Versicherungsnehmer vervollständigt, falls der Investmentfonds vom Versicherer selbst bilanziert wird, hat aber keinen Einfluss auf den dem RLV-zugehörigen Teil der Aktiva.

¹³Vgl. dazu [EUR08b, Seite 124].

¹⁴Vgl. dazu [EUR08b, Seite 139].

¹⁵mit $z_{0,005} = -2,5758$, dem 0,005-Quantil der Standardnormalverteilung.

2.7 Zusammenhang zwischen Kapitalmarkt und Storno

Es sei zunächst davon ausgegangen, dass das Stornoverhalten der Versicherungsnehmer konstant und somit unabhängig von der Entwicklung ihres Fondsvermögens ist. Die entsprechende Stornovariablen heisst Stornorate lr (lapse-rate) und beschreibt die Anzahl der stornierten Verträge in einem Jahr in Prozent¹⁶. Dieses Vorgehen hat den Vorteil, dass die Berechnung der aus der Risikolebensversicherung stammenden Verpflichtungen gegenüber den Versicherungsnehmern deterministisch und unabhängig vom Kapitalmarktmodell erfolgen kann (siehe Abschnitt 3). Eine solche Vereinfachung ignoriert aber folgende Einflüsse des Kapitalmarktes auf das Stornoverhalten des Versicherungsnehmers:

- Eine unerwartet positive Entwicklung des Kapitalmarktes kann entweder zu vermehrten Gewinnmitnahmen oder zur Abnahme des Stornos in Erwartung weiterhin steigender Kurse führen.
- Eine unerwartet negative Entwicklung des Kapitalmarktes kann wiederum entweder zu Panikreaktion und somit Massenstorno oder zur Abnahme des Stornos führen, um Verluste „auszusitzen“.

„In general, policyholders’ behaviour should not be assumed to be independent of financial markets, a firm’s treatment of customers or publicly available information unless proper evidence to support the assumption can be observed“¹⁷.

Es ist nicht das Ziel dieser Arbeit, einen solchen Zusammenhang zwischen der Wertentwicklung des Investmentfonds und dem Stornoverhalten des Versicherungsnehmers nachzuweisen. In der Literatur finden sich allerdings zahlreiche Hinweise, dass das Stornoverhalten von der Entwicklung des Kapitalmarktes abhängt. So konnte ein Zusammenhang zwischen der Performance des FTSE 100 und den Neuabschlüssen von britischen „unit-linked life insurance“-Produkten festgestellt werden¹⁸. Aufgrund dessen lässt sich auch ein Zusammenhang zwischen Stornoverhalten und Kapitalmarkt vermuten: „Clients may also lapse the policy if market conditions – and thus the value of the unit-linked fund – change substantially. Policyholders may want to profit from capital gains in times of booming stock markets and limit their losses when markets decline“¹⁹.

Die Untersuchung des französischen Marktes liefert weitere Argumente: „In general, in view of the growing trend towards unit-linked products, average lapse ratios are likely to be higher and more volatile“²⁰. Vor allem im Zusammenhang mit Garantien der FLV ist ein vom Kapitalmarkt abhängiges Stornoverhalten naheliegend und in der Literatur

¹⁶Die Stornoraten werden ähnlich wie Sterblichkeitswahrscheinlichkeiten in Stornotafeln angegeben.

Allerdings muss jedes Versicherungsunternehmen eigene Stornotafeln für jede Produktart erstellen.

¹⁷Vgl. [EUR08b, Seite 34].

¹⁸Vgl. [Swi03, Seite 7].

¹⁹Vgl. [Swi03, Seite 25].

²⁰Vgl. [Swi03, Seite 26]

schon angeregt²¹ worden.

Weitere Hinweise liefert eine Studie von Watson Wyatt, in der das Stornoverhalten der Versicherungsnehmer bei Versicherungsprodukten mit Sparcharakter mit Hilfe von verallgemeinerten linearen Modellen untersucht wird²². Neben einer Reihe weiterer Faktoren wird der Einfluß der Kapitalmarktentwicklung auf Produkte mit und ohne Garantien beschrieben. Bei Versicherungsprodukten ohne oder mit nur niedrigen Garantien lässt sich eine lineare Zunahme des Stornos bei schlechter Kapitalmarktentwicklung beobachten. Ein entgegengesetztes Verhalten tritt bei Produkten mit hohen Garantien ein.

Bei der Kalkulation von Variable Annuities wird von einigen Versicherern bereits ein dynamisches Stornoverhalten angenommen. Dabei wird unterstellt, dass das Storno, bzw. die Ausübung der Garantie vom aktuellen Wert („In-the-Money“-ness“) der Garantie abhängt²³. Die „American Academy of Actuaries“ verwendet einen „Dynamic Lapse Multiplier“, der die deterministische Stornorate umso mehr senkt, je größer der Wert der Garantie ist²⁴.

Ein Zusammenhang zwischen der Zinsentwicklung und Stornoverhalten bei anderen Lebensversicherungsprodukten wurde anhand von Modellen²⁵ und empirischen Studien²⁶ untersucht. Es wurden auch andere, mit dem Kapitalmarkt verbundene, Einflussfaktoren auf das Stornoverhalten wie Konsumentennachfrage, Entscheidungen des Managements sowie Rating des Versicherers untersucht²⁷.

Einen anderen Ansatz verfolgen dagegen Kolkiewicz und Tan²⁸. Anstatt das Stornoverhalten an die Entwicklung, also Rendite, eines Kapitalmarktes zu knüpfen, wird das Stornoverhalten von der nicht konstanten, stochastischen Volatilität beeinflusst. Hohe Volatilität führt auch zu hohem Storno und umgekehrt. Dabei kann gezeigt werden, dass die Berücksichtigung des stochastischen Stornos bei der Prämienkalkulation einen erheblichen Einfluss auf die Einmalprämien von Versicherungsprodukten mit und ohne Garantien hat. Kolkiewicz und Tan verwenden Stornofunktionen der Form²⁹

$$h(x) = \gamma \left(\frac{2 \exp(\beta(x - k))}{1 + \exp(\beta(x - k))} \right)$$

und schlagen auch vor, stückweise lineare sowie Arcustangens Funktionen zu verwenden.

²¹Vgl. [HPP07, Seite 8].

²²Vgl. [Edw09] sowie [CEG08].

²³Vgl. dazu [Mil09, Seite 33-36].

²⁴Vgl. dazu [Ame05].

²⁵Vgl. [DG08].

²⁶Vgl. [KTC03].

²⁷Vgl. [MH07].

²⁸Vgl. [KT06].

²⁹Mit $x \geq k$ und den Parametern γ , β und k .

Im Folgenden wird ein Zusammenhang zwischen Kapitalmarkt und Stornoverhalten angenommen. Ein finanzrationales Stornoverhalten im vorliegenden Modell ist nicht so offensichtlich, wie bei einer Versicherung mit einer Garantie, bei der der Versicherungsnehmer storniert, wenn die garantierte Auszahlung höher ist als der aktuelle Wert des Portfolios. Hier soll das Verhalten anhand der Entwicklung des Kapitalmarktes im Vergleich zur risikolosen Anlage modelliert werden. Je extremer die Ausschläge am Kapitalmarkt, desto extremer soll das Stornoverhalten sein. Zu Beginn des Abschnitts wurden bereits mögliche Formen des Stornoverhaltens aufgezeigt, eine empirische Studie zum tatsächlichen Stornoverhalten bei FLV ohne Garantien ist nach Wissen des Verfassers bislang nicht veröffentlicht worden.

2.8 Anforderungen an eine Stornofunktion

Das Ziel bei der Konstruktion der Stornofunktion ist es, das Modell einerseits durch eine Verhaltensabhängigkeit zu erweitern und andererseits weiterhin eine Konsistenz zu den Vorgaben aus QIS 4 zu gewährleisten. Darüberhinaus soll die Stornofunktion das Verhalten möglichst sinnvoll interpretierbar wiedergeben. Dies führt zu folgenden Anforderungen an die Stornofunktion:

- Die Stornofunktion soll von der Entwicklung des Kapitalmarktes abhängen. Damit ist sie eine Zufallsvariable.
Es gilt:

$$lapse := lapse(S_t) \quad (7)$$

- Die Stornofunktion soll bei einer erwarteten Entwicklung des Kapitalmarktes einen Wert liefern, der dem Wert der im deterministischen Modell verwendeten Stornorate lr entspricht:

$$lapse(\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[S_t] = e^{\delta} S_{t-1}) := lr \quad (8)$$

Es kann auch die folgende schärfere Bedingung gefordert werden:

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[lapse(S_t)] := lr \quad (9)$$

- Die in QIS 4 festgelegten Schockwerte für die Stornorate sollen den Quantilen der Stornofunktion (entsprechend dem VaR-Ansatz) entsprechen³⁰.
- Unter Berücksichtigung der unterschiedlichen Verhaltensweisen der Versicherungsnehmer (siehe Abschnitt 2.7) lassen sich vier unterschiedliche Verläufe von Stornofunktionen konstruieren. Entsprechend dem Verlauf der Stornofunktion gilt eine der folgenden Bedingungen³¹:

$$P[lrd < lapse(S_t)] \geq 0,995 \quad \text{und} \quad P[lapse(S_t) \leq lru] \geq 0,995 \quad (10)$$

$$P[lrd < lapse(S_t)] \geq 0,995 \quad (11)$$

$$P[lapse(S_t) \leq lru] \geq 0,995 \quad (12)$$

Die Gleichung 11 entspricht einem Stornorückgang bei einer unerwarteten Entwicklung am Kapitalmarkt während die Gleichung 12 einer Zunahme des Stornos entspricht. Die beiden Mischformen werden durch Gleichung 10 charakterisiert.

- Zunächst werden Treppenfunktionen sowie lineare Stornofunktionen betrachtet. Allerdings ist die Forderung nach einer realistischen Wiedergabe des Verhaltens der Versicherungsnehmer nicht mit der Linearitätseigenschaft vereinbar. So ist davon auszugehen, dass sich das Verhalten des Versicherungsnehmers auf Änderungen in extremen Situationen von denen unter gewöhnlichen Umständen unterscheidet. Nichtlineare Stornofunktionen werden später berücksichtigt.

³⁰Vgl. [EUR08b, Seite 211]

³¹ lrd und lru bezeichnen die Stornoraten bei „down-shock“ bzw. „up-shock“. Vgl. dazu Abschnitt 2.9.

2.9 Kalibrierung der Stornoraten

Wie zur Kalibrierung der Volatilität wird auch hier ausgenutzt, dass die Standardformel in QIS 4 ein VaR-Maß zum Konfidenzniveau von 99,5% für einen Zeithorizont von einem Jahr reflektiert³². Allerdings wird beim „equity risk“ nur ein Stressszenario angeführt, während es beim „lapse risk“ drei verschiedene Szenarios gibt, was eine eindeutige Kalibrierung unmöglich macht. Es sollen nun zwei Möglichkeiten vorgestellt werden, wie das Problem gelöst werden kann.

- Es wird zunächst nur das Stressszenario des unmittelbaren einmaligen massiven Stornos berücksichtigt. Somit hat das Stressszenario auf dem Kapitalmarkt eine direkte Entsprechung beim Storno: Ein massiver Kursverlust führt zu massivem Storno. Allerdings werden die Stornofunktionen so konstruiert, dass sie verschiedene Verhaltensweisen abbilden. Es ist also wünschenswert, massives Storno aber auch massiven Stornorückgang bei starken Kursänderungen zuzulassen. Die Risiken des Versicherers werden wie folgt neu definiert:

„**equity risk**“³³ – Im Kapitalmarkt-Stressszenario wird der Versicherer mit einem einmaligen Kurssturz zu Beginn der betrachteten Periode von 32% konfrontiert sowie mit einem entsprechenden massiven Kursanstieg³⁴.

„**lapse risk**“³⁵ – Das Stornorisiko umfasst nur noch zwei Stressszenarien: Ein einmaliges massives Storno im Umfang des 1,7-fachen der vorgegebenen deterministischen Stornorate und ein einmaliger massiver Stornorückgang gleichen Ausmaßes³⁶.

Somit können die Stressszenarien der massiven Veränderung der Stornorate je nach Verhalten der Versicherungsnehmer durch die Gleichungen 10, 11 und 12 beschrieben werden. Es sei hier noch einmal darauf hingewiesen, dass dieses Vorgehen einen Kompromiss darstellt, da dass das VaR-Maß zum Konfidenzniveau von 99,5% für einen Zeithorizont von einem Jahr gilt.

- Es ist davon auszugehen, dass die Stornorate beim Stressszenario einer dauerhaften Erhöhung nicht denselben Wert erreicht, wie die Stornorate beim massiven Storno (*MassLapse* \gg *lrd*). Somit können beide nicht äquivalent ein VaR-Maß zum Konfidenzniveau von 99,5% für einen Zeithorizont von einem Jahr reflektieren. Die in QIS 4 festgelegten Werte können in diesem Fall wie folgt interpretiert werden: Die dem massiven Storno entsprechende Stornorate wird durch ein VaR-Maß zum Konfidenzniveau von 99,5% für einen Zeithorizont von einem Jahr reflektiert. Die einer dauerhaften Veränderung entsprechende Stornorate wird durch ein

³²Vgl. [EUR08b, Seite 211].

³³Vgl. [EUR08b, Seite 137-143].

³⁴Das Ausmaß des massiven Kursanstiegs hängt von den im Kapitalmarktmodell gewählten Parametern ab. Bei einem risikolosen Zins von $r = 2,25\%$ und mit Drift $\mu = r + 0,035$ ergibt sich ein massiver Kursanstieg von 60,5%.

³⁵Vgl. [EUR08b, Seite 167-169].

³⁶Entspricht also bei einer deterministischen Stornorate von 10% einem massiven Storno von 17% und einem massiven Stornorückgang auf 3%.

VaR-Maß zum Konfidenzniveau von 99,5% für einen der Laufzeit entsprechendem Zeithorizont reflektiert. Es gilt also (für den Fall einer dauerhaften Senkung der Stornorate):

$$P(\text{lapse} > \text{MassLapse}) = \prod_{t=1}^T P(\text{lapse}(S_t) \leq \text{lrd}(t)) = 0,005 \quad (13)$$

Für eine konstante deterministische Stornorate $lr = \text{const.}$ gilt dann³⁷:

$$\begin{aligned} P(\text{lapse}(S_t) \leq \text{lrd})^T &= 0,005 \\ P(\text{lapse}(S_t) \leq \text{lrd}) &= 0,005^{1/T} \end{aligned} \quad (14)$$

Es handelt sich also um die gleiche Bedingung wie oben, allerdings mit einem VaR-Maß zum Konfidenzniveau von $100 \cdot (1 - 0,005^{1/T})\%$ für einen Zeithorizont von einem Jahr und konstanter Stornorate.

Im Folgenden wird der erste Ansatz verwendet.

³⁷Aus der stochastischen Unabhängigkeit der Renditen folgt die stochastische Unabhängigkeit der Stornoraten $\text{lapse}(S_t)$.

2.10 Stornofunktionen

Es werden vier Typen von Stornofunktionen verwendet: Treppenfunktionen (TypA), zwei Typen von linearen Stornofunktionen (TypB und TypC) sowie stetige nichtlineare Stornofunktionen (TypD). Bei Stornofunktionen vom TypA und TypC war es möglich alle vier Verhaltensweisen der Versicherungsnehmer zu modellieren, bei Stornofunktionen vom TypB und TypD wurden aufgrund der Konstruktion der Stornofunktionen jeweils nur zwei Verhaltensweisen modelliert. Alle Stornofunktionen werden so konstruiert, dass sie zumindest die VaR-Bedingungen erfüllen (vgl. dazu Abschnitt 2.9). Bei der Konstruktion der Stornofunktionen von TypA, TypC und TypD wurde die Information über die Entwicklung des Kapitalmarktes verglichen zur risikolosen Anlage für die betrachtete Periode verwendet.

Für die Erstellung der Schaubilder der Stornofunktionen wurden folgende Parameter verwendet:

- deterministische Stornorate (l_r): 5%
- massives Storno (l_{ru}): 7,5%
- massiver Stornorückgang (l_{rd}): 2,5%
- risikoloser Zins (r): 5%

2.10.1 Treppenfunktionen als Stornofunktionen

Die Verwendung von Treppenfunktionen hat den Vorteil, dass sowohl eine ausreichende Anzahl an Bedingungen berücksichtigt werden kann, ohne besondere Schwierigkeiten bei der Bestimmung der Parameter, als auch eine beliebig genaue Approximation der stetigen Funktionen möglich ist. Es wurden hier Treppenfunktionen mit vier Stufen unter den Bedingungen 8 sowie 10, 11 bzw. 12 verwendet. Die Sprünge erfolgen jeweils an den VaR-Quantilen und an den Mittelwerten aus der risikolosen Verzinsung und den VaR-Quantilen.

Es gilt³⁸:

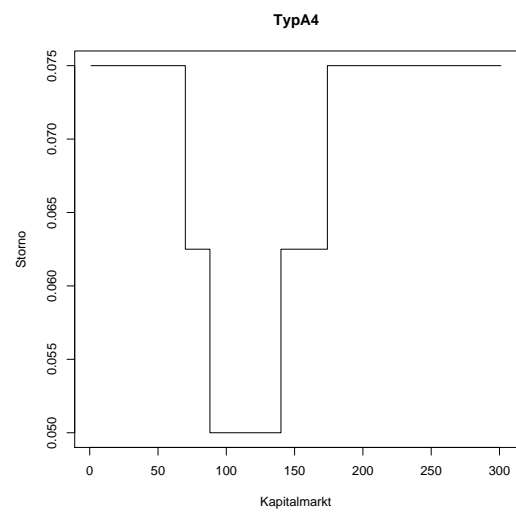
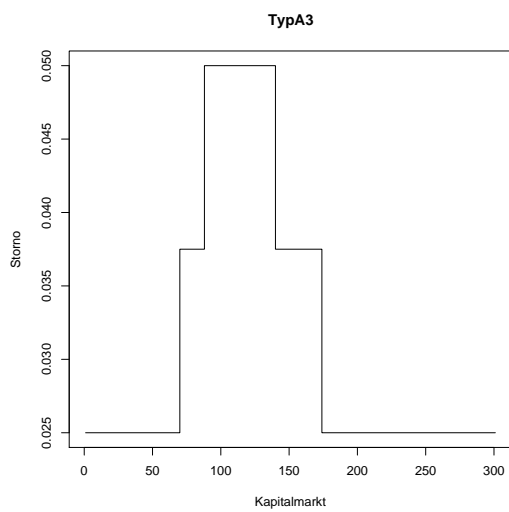
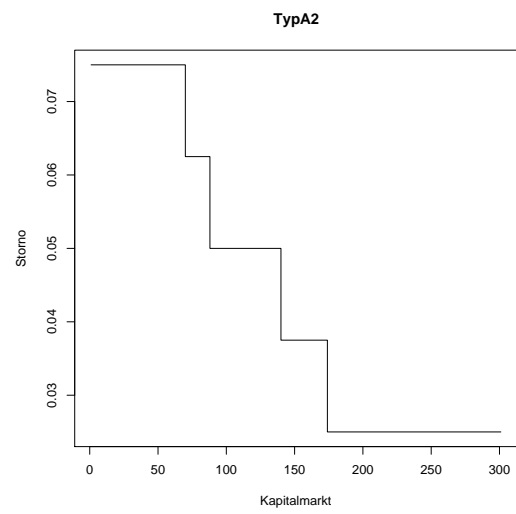
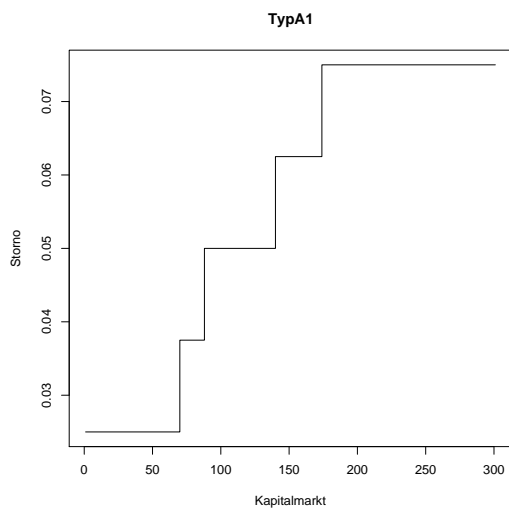
$$TypA.1 \quad lapse(S_t) = \begin{cases} lrd & \text{für } S_t \leq q_{0,005}S_{t-1} \\ \frac{ld+lr}{2} & \text{für } q_{0,005}S_{t-1} < S_t \leq \frac{(e^\delta+q_{0,005})S_{t-1}}{2} \\ lr & \text{für } \frac{(e^\delta+q_{0,005})S_{t-1}}{2} < S_t \leq \frac{(e^\delta+q_{0,995})S_{t-1}}{2} \\ \frac{ru+lr}{2} & \text{für } \frac{(e^\delta+q_{0,995})S_{t-1}}{2} < S_t < q_{0,995}S_{t-1} \\ lru & \text{sonst} \end{cases} \quad (15)$$

$$TypA.2 \quad lapse(S_t) = \begin{cases} lru & \text{für } S_t \leq q_{0,005}S_{t-1} \\ \frac{ru+lr}{2} & \text{für } q_{0,005}S_{t-1} < S_t \leq \frac{(e^\delta+q_{0,005})S_{t-1}}{2} \\ lr & \text{für } \frac{(e^\delta+q_{0,005})S_{t-1}}{2} < S_t \leq \frac{(e^\delta+q_{0,995})S_{t-1}}{2} \\ \frac{ld+lr}{2} & \text{für } \frac{(e^\delta+q_{0,995})S_{t-1}}{2} < S_t < q_{0,995}S_{t-1} \\ lrd & \text{sonst} \end{cases} \quad (16)$$

$$TypA.3 \quad lapse(S_t) = \begin{cases} lrd & \text{für } S_t \leq q_{0,005}S_{t-1} \\ \frac{ld+lr}{2} & \text{für } q_{0,005}S_{t-1} < S_t \leq \frac{(e^\delta+q_{0,005})S_{t-1}}{2} \\ lr & \text{für } \frac{(e^\delta+q_{0,005})S_{t-1}}{2} < S_t \leq \frac{(e^\delta+q_{0,995})S_{t-1}}{2} \\ \frac{ld+lr}{2} & \text{für } \frac{(e^\delta+q_{0,995})S_{t-1}}{2} < S_t < q_{0,995}S_{t-1} \\ lrd & \text{sonst} \end{cases} \quad (17)$$

$$TypA.4 \quad lapse(S_t) = \begin{cases} lru & \text{für } S_t \leq q_{0,005}S_{t-1} \\ \frac{ru+lr}{2} & \text{für } q_{0,005}S_{t-1} < S_t \leq \frac{(e^\delta+q_{0,005})S_{t-1}}{2} \\ lr & \text{für } \frac{(e^\delta+q_{0,005})S_{t-1}}{2} < S_t \leq \frac{(e^\delta+q_{0,995})S_{t-1}}{2} \\ \frac{ru+lr}{2} & \text{für } \frac{(e^\delta+q_{0,995})S_{t-1}}{2} < S_t < q_{0,995}S_{t-1} \\ lru & \text{sonst} \end{cases} \quad (18)$$

³⁸Dabei bezeichnen $q_{0,995}$ sowie $q_{0,005}$ die Quantile der Rendite.



2.10.2 Lineare Stornofunktionen

Zunächst sollen einfache lineare Stornofunktionen betrachtet werden, die nur die Bedingung aus Gleichung 10 erfüllen. Die Stornorate ist zwischen den VaR-Quantilen linear abhängig von der Entwicklung des Kapitalmarktes.

$$\begin{aligned} \text{TypB.1} \quad \text{lapse}(S_t) &= \begin{cases} \frac{m}{S_{t-1}} S_t + c & \text{für } S_t > S_* \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \\ \text{TypB.2} \quad \text{lapse}(S_t) &= \begin{cases} \frac{m}{S_{t-1}} S_t + c & \text{für } S_t \leq S^* \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

Aus 10 folgt zunächst

$$P \left[lrd < \frac{m}{S_{t-1}} S_t + c \right] \geq 0,995 \quad \text{und} \quad P \left[\frac{m}{S_{t-1}} S_t + c \leq lru \right] \geq 0,995$$

und

$$\begin{aligned} \text{TypB.1} \quad P \left[\frac{S_t}{S_{t-1}} \leq \frac{lru - c}{m} \right] &\geq 0,995 \quad \text{sowie} \quad P \left[\frac{S_t}{S_{t-1}} \leq \frac{lrd - c}{m} \right] < 0,005 \\ \text{TypB.2} \quad P \left[\frac{S_t}{S_{t-1}} \leq \frac{lrd - c}{m} \right] &\geq 0,995 \quad \text{sowie} \quad P \left[\frac{S_t}{S_{t-1}} \leq \frac{lru - c}{m} \right] < 0,005. \end{aligned}$$

Es gilt also:

$$\begin{aligned} \text{TypB.1} \quad q_{0,995} &= \frac{lru - c}{m} & \text{und} & \quad q_{0,005} = \frac{lrd - c}{m} \\ \text{TypB.2} \quad q_{0,995} &= \frac{lrd - c}{m} & \text{und} & \quad q_{0,005} = \frac{lru - c}{m} \end{aligned}$$

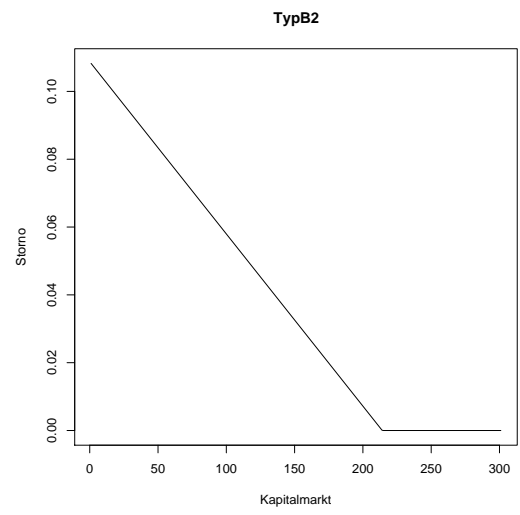
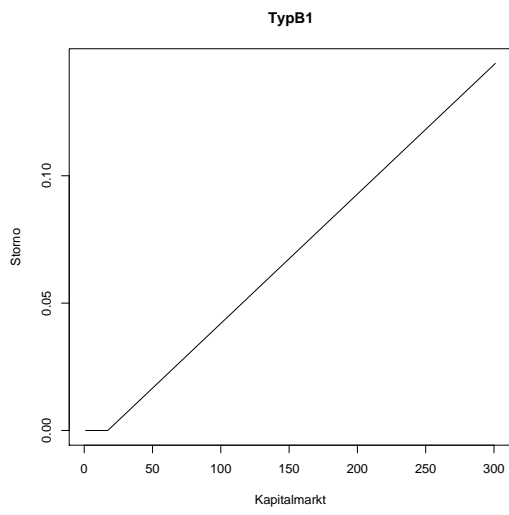
und somit

$$\text{TypB.1} \quad \text{lapse}(S_t) = \begin{cases} \frac{lru - lrd}{q_{0,995} - q_{0,005}} \frac{S_t}{S_{t-1}} + \frac{q_{0,995} lrd - q_{0,005} lru}{q_{0,995} - q_{0,005}} & \text{für } S_t > S_* \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (19)$$

$$\text{mit } S_* = - \frac{q_{0,995} lrd - q_{0,005} lru}{lru - lrd} S_{t-1}$$

$$\text{TypB.2} \quad \text{lapse}(S_t) = \begin{cases} \frac{lrd - lru}{q_{0,995} - q_{0,005}} \frac{S_t}{S_{t-1}} + \frac{q_{0,995} lru - q_{0,005} lrd}{q_{0,995} - q_{0,005}} & \text{für } S_t \leq S^* \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (20)$$

$$\text{mit } S^* = - \frac{q_{0,995} lru - q_{0,005} lrd}{lrd - lru} S_{t-1}$$



Die mit TypC bezeichneten Stornofunktionen erfüllen neben den Bedingungen aus 10, 11 und 12 zusätzlich die in Gleichung 8 formulierte Bedingung. Der von der Kapitalmarktentwicklung abhängige lineare Teil wird so in zwei Abschnitte unterteilt, dass der Wert der Stornrate bei einer der risikolosen Anlage entsprechenden Kapitalmarktentwicklung dem deterministischen Wert lr entspricht.

$$\begin{aligned}
\text{TypC.1} \quad \text{lapse}(S_t) &= \begin{cases} \frac{m_1}{S_{t-1}} S_t + c_1 & \text{für } S_* < S_t \leq e^\delta S_{t-1} \\ \frac{m_2}{S_{t-1}} S_t + c_2 & \text{für } e^\delta S_{t-1} \leq S_t \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \\
\text{TypC.2} \quad \text{lapse}(S_t) &= \begin{cases} \frac{m_1}{S_{t-1}} S_t + c_1 & \text{für } S_t \leq e^\delta S_{t-1} \\ \frac{m_2}{S_{t-1}} S_t + c_2 & \text{für } e^\delta S_{t-1} < S_t \leq S^* \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \\
\text{TypC.3} \quad \text{lapse}(S_t) &= \begin{cases} \frac{m_1}{S_{t-1}} S_t + c_1 & \text{für } S_* < S_t \leq e^\delta S_{t-1} \\ \frac{m_2}{S_{t-1}} S_t + c_2 & \text{für } e^\delta S_{t-1} < S_t \leq S^* \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \\
\text{TypC.4} \quad \text{lapse}(S_t) &= \begin{cases} \frac{m_1}{S_{t-1}} S_t + c_1 & \text{für } S_t \leq e^\delta S_{t-1} \\ \frac{m_2}{S_{t-1}} S_t + c_2 & \text{sonst} \end{cases}
\end{aligned}$$

Für TypC.1 bis TypC.4 gilt mit $lr = \frac{m_1}{S_{t-1}} e^\delta S_{t-1} + c_1 = \frac{m_2}{S_{t-1}} e^\delta S_{t-1} + c_2$ sowie

$$\begin{aligned}
P \left[\frac{m_1}{S_{t-1}} S_t + c_1 \leq lrd \right] &< 0,005 \text{ und } P \left[\frac{m_2}{S_{t-1}} S_t + c_2 \leq lru \right] \geq 0,995 \\
P \left[\frac{m_1}{S_{t-1}} S_t + c_1 \leq lru \right] &< 0,005 \text{ und } P \left[\frac{m_2}{S_{t-1}} S_t + c_2 \leq lrd \right] \geq 0,995 \\
P \left[\frac{m_1}{S_{t-1}} S_t + c_1 \leq lrd \right] &< 0,005 \text{ und } P \left[\frac{m_2}{S_{t-1}} S_t + c_2 \leq lrd \right] \geq 0,995 \\
P \left[\frac{m_1}{S_{t-1}} S_t + c_1 \leq lru \right] &< 0,005 \text{ und } P \left[\frac{m_2}{S_{t-1}} S_t + c_2 \leq lru \right] \geq 0,995
\end{aligned}$$

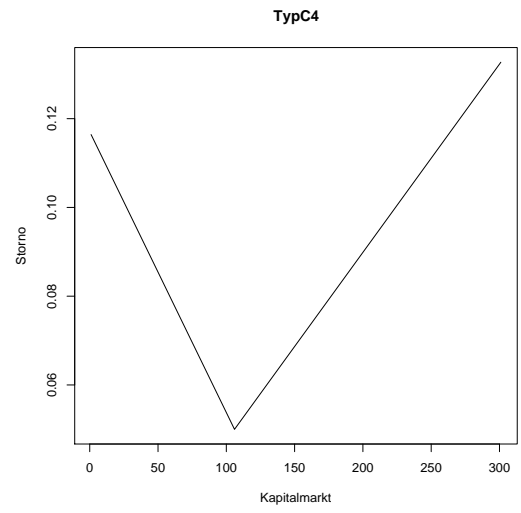
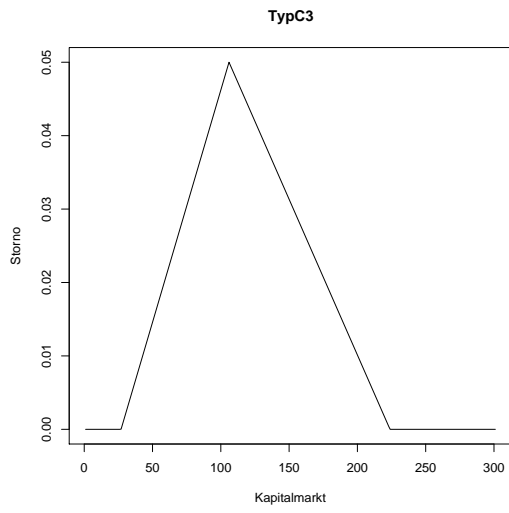
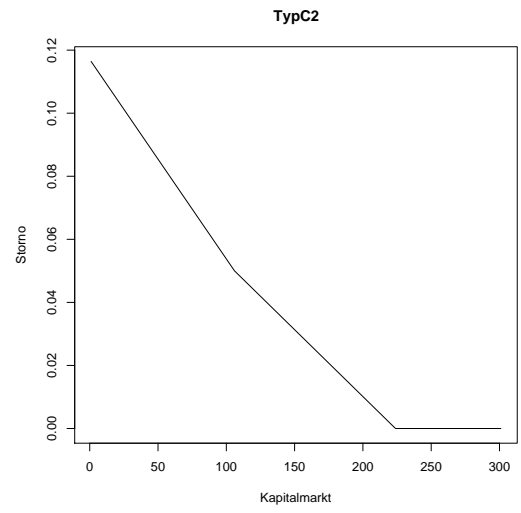
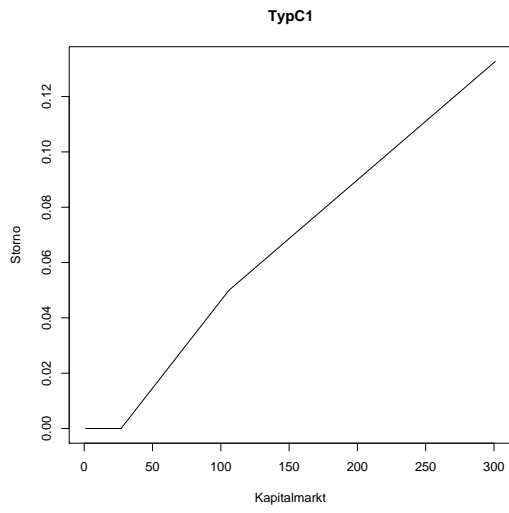
$$\text{TypC.1} \quad \text{lapse}(S_t) = \begin{cases} \frac{lr-lrd}{e^\delta-q_{0,005}} \frac{S_t}{S_{t-1}} + \frac{e^\delta lrd - q_{0,005} lr}{e^\delta - q_{0,005}} & \text{für } S_* < S_t \leq e^\delta S_{t-1} \\ \frac{lr-lru}{e^\delta-q_{0,995}} \frac{S_t}{S_{t-1}} + \frac{e^\delta lru - q_{0,995} lr}{e^\delta - q_{0,995}} & \text{für } e^\delta S_{t-1} \leq S_t \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (21)$$

$$\text{TypC.2} \quad \text{lapse}(S_t) = \begin{cases} \frac{lr-lru}{e^\delta-q_{0,005}} \frac{S_t}{S_{t-1}} + \frac{e^\delta lru - q_{0,005} lr}{e^\delta - q_{0,005}} & \text{für } S_t \leq e^\delta S_{t-1} \\ \frac{lr-lrd}{e^\delta-q_{0,995}} \frac{S_t}{S_{t-1}} + \frac{e^\delta lrd - q_{0,995} lr}{e^\delta - q_{0,995}} & \text{für } e^\delta S_{t-1} < S_t \leq S^* \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (22)$$

$$\text{TypC.3} \quad \text{lapse}(S_t) = \begin{cases} \frac{lr-lrd}{e^\delta-q_{0,005}} \frac{S_t}{S_{t-1}} + \frac{e^\delta lrd - q_{0,005} lr}{e^\delta - q_{0,005}} & \text{für } S_* < S_t \leq e^\delta S_{t-1} \\ \frac{lr-lrd}{e^\delta-q_{0,995}} \frac{S_t}{S_{t-1}} + \frac{e^\delta lrd - q_{0,995} lr}{e^\delta - q_{0,995}} & \text{für } e^\delta S_{t-1} < S_t \leq S^* \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (23)$$

$$\text{TypC.4} \quad \text{lapse}(S_t) = \begin{cases} \frac{lr-lru}{e^\delta-q_{0,005}} \frac{S_t}{S_{t-1}} + \frac{e^\delta lru - q_{0,005} lr}{e^\delta - q_{0,005}} & \text{für } S_t \leq e^\delta S_{t-1} \\ \frac{lr-lru}{e^\delta-q_{0,995}} \frac{S_t}{S_{t-1}} + \frac{e^\delta lru - q_{0,995} lr}{e^\delta - q_{0,995}} & \text{sonst} \end{cases} \quad (24)$$

S_* und S^* bezeichnen wie oben die entsprechenden Nullstellen.



2.10.3 Stetige nichtlineare Stornofunktionen

Im Zusammenhang mit „single premium deferred annuities“ werden in der Literatur Funktionen folgenden Typs verwendet³⁹:

$$l = a + b \cdot \arctan(m(r - i - y) - n), \quad (25)$$

wobei l die jährliche Stornorate ist und die positiven Parameter a , b , m und n so gewählt werden, dass in Extremfällen eine minimale bzw. maximale Stornorate⁴⁰ angenommen wird. Zudem sollen die Veränderungen der Stornorate mit zunehmender Differenz zwischen den Verzinsungen zunehmen. Die weiteren Variablen sind:

- r : Verzinsung durch Wettbewerber.
- i : Verzinsung durch den Versicherer.
- y : Parameter abhängig von Stornogebühr.

Im vorliegenden Fall sei die Verzinsung der Wettbewerber gleich dem risikolosem Zins, die Verzinsung des Versicherers entspreche der Rendite $\frac{S_t}{S_{t-1}}$.

Auch hier sollen verschiedene Verhaltensweisen zugelassen werden. Die Stornofunktionen haben somit folgende Form:

$$\text{TypD1} \quad \text{lapse}(S_t) = a + b \cdot \arctan\left(m\left(\frac{S_t}{S_{t-1}} - e^\delta\right) - n\right) \quad (26)$$

$$\text{TypD2} \quad \text{lapse}(S_t) = a + b \cdot \arctan\left(m\left(e^\delta - \frac{S_t}{S_{t-1}}\right) - n\right) \quad (27)$$

und erfüllen folgende Bedingungen:

- Der Parameter a wird so gewählt, dass die Stornorate nicht negativ wird; um in jedem Fall eine minimale Stornorate von 0% zu garantieren, muss gelten:

$$0 \leq a + b \lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan(x)$$

- Der Parameter b wird so gewählt, dass die Stornofunktion bei einer der risikolosen Anlage entsprechenden Entwicklung des Kapitalmarktes die deterministische Stornorate liefert:

$$lr = \text{lapse}(e^\delta S_{t-1}) = a + b \arctan(-n)$$

³⁹Vgl. [Zen99] und [Smi01]. Ursprünglich wurden solche Stornofunktionen für „residential mortgage prepayments“ verwendet.

⁴⁰In [Zen99, Seite 109] wird minimum lapse rate= 4% bzw. maximum lapse rate= 45% vorgeschlagen.

- Die Parameter m sowie n werden anhand der Quantile der Rendite sowie den VaR-Werten lrd und lru bestimmt.

$$P[lrd < lapse(S_t)] \geq 0,995 \quad \text{und} \quad P[lapse(S_t) \leq lru] \geq 0,995$$

$$P \left[lrd < a + b \cdot \arctan \left(m \left(e^\delta - \frac{S_t}{S_{t-1}} \right) - n \right) \right] \geq 0,995$$

$$\text{und} \quad P \left[a + b \cdot \arctan \left(m \left(e^\delta - \frac{S_t}{S_{t-1}} \right) - n \right) \leq lru \right] \geq 0,995$$

bzw.

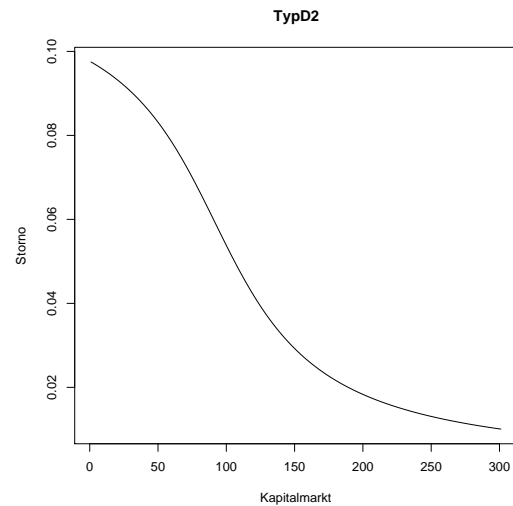
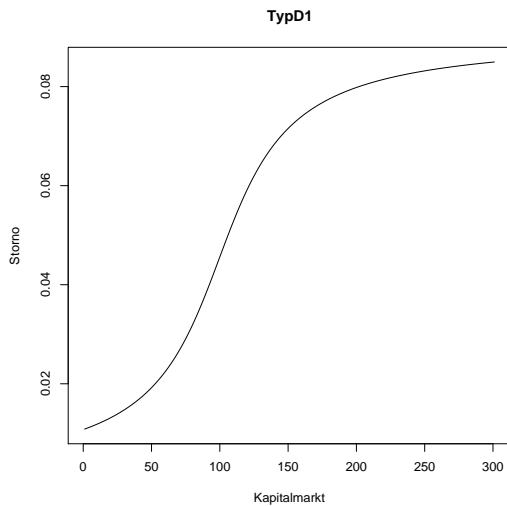
$$P \left[\frac{S_t}{S_{t-1}} \leq -\frac{1}{m} \left(\tan \left(\frac{lrd - a}{b} \right) + n \right) + e^\delta \right] \geq 0,995$$

$$P \left[\frac{S_t}{S_{t-1}} \leq -\frac{1}{m} \left(\tan \left(\frac{lru - a}{b} \right) + n \right) + e^\delta \right] < 0,005$$

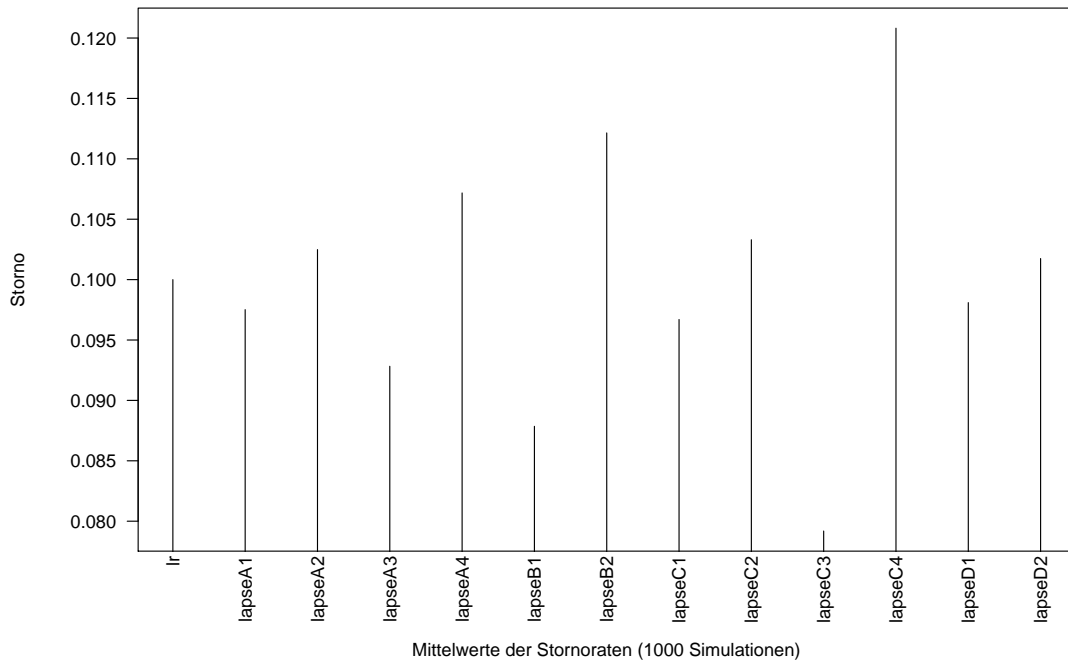
Daraus folgt:

$$q_{0,995} = -\frac{1}{m} \left(\tan \left(\frac{lrd - a}{b} \right) + n \right) + e^\delta \quad \text{und}$$

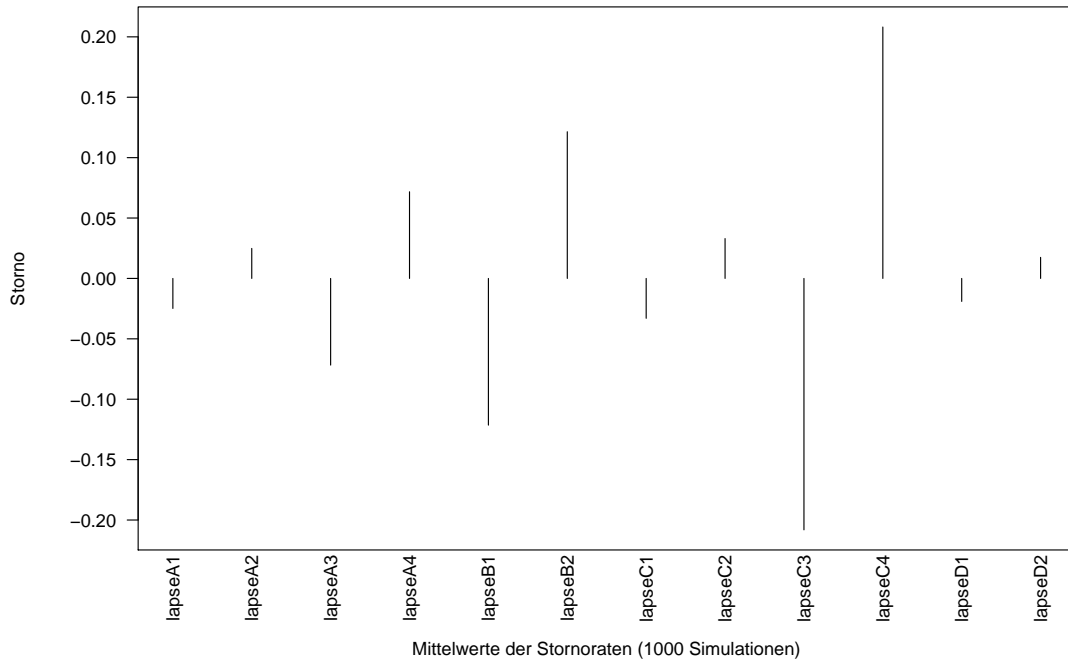
$$q_{0,005} = -\frac{1}{m} \left(\tan \left(\frac{lru - a}{b} \right) + n \right) + e^\delta$$



Stornoraten für das erste Jahr



Prozentuale Abweichung von der deterministischen Stornorate für das erste Jahr



3 Berechnung der BEL

Die „best estimate liability“, also der Marktwert der Verpflichtung des Versicherers gegenüber den Versicherungsnehmern, wird in jedem Fall anhand der Standardformel aus der Versicherungsmathematik mit Rechnungsgrundlagen 2. Ordnung berechnet⁴¹. Den deterministischen Wert bekommt man durch die Verwendung der Stornorate lr . Um die stochastische BEL zu berechnen, wird zunächst durch Simulation des Kapitalmarktverlaufes und durch die Verwendung der Stornofunktionen für jeden Pfad ein Vektor von Stornoraten $lapse(S_t)$ erzeugt und somit Realisierungen der BEL kalkuliert. Mehrfaches Wiederholen der Simulation ergibt verschiedene simulierte BEL, die stochastische BEL entspricht dem Mittelwert. Die Standardformel für eine Realisierung der BEL für den Zeitpunkt t lautet wie folgt:

$$BEL(t) = VS \cdot VN \cdot \frac{1}{v_t} \cdot \sum_{i=t}^{T-1} v_{i+1} \cdot {}_i p_x^{tot} \cdot q_{x+i} \quad (28)$$

VS bezeichnet die Versicherungssumme, VN gibt die Anzahl der Versicherungsnehmer an und v^t gibt den Diskontfaktor für einen Cash-Flow zum Zeitpunkt t an:

$$v_i = \frac{v_{i-1}}{1 + r_i} \quad \text{mit} \quad v_0 = 1 \quad (29)$$

Das ${}_i p_x^{tot}$ wird wie folgt kalkuliert:

$$lapse(S_0) = lr_0 := 0 \quad \text{sowie} \quad {}_0 p_x^{tot} = 1 \quad (30)$$

$${}_i p_x^{tot} = \prod_{j=1}^i (1 - lapse(S_{j-1}) - q_{x+j-1}) \quad \text{bzw.} \quad (31)$$

$${}_i p_x^{tot} = \prod_{j=1}^i (1 - lr_{j-1} - q_{x+j-1}) \quad (32)$$

Aus der Standardformel lässt sich leicht ableiten, unter welchen Bedingungen die stochastische BEL für viele Simulationen gegen den deterministischen Wert konvergiert (L^1 -Konvergenz). Es muss gelten:

$$\begin{aligned} \prod_{j=1}^i (1 - lr_{j-1} - q_{x+j-1}) &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\prod_{j=1}^i (1 - lapse(S_{j-1}) - q_{x+j-1}) \right] \quad \forall i \quad (33) \\ &= \prod_{j=1}^i \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} [(1 - lapse(S_{j-1}) - q_{x+j-1})] \end{aligned}$$

Dies folgt direkt aus der stochastischen Unabhängigkeit der Renditen, und es gilt:

⁴¹Für die Sterblichkeitsraten 2. Ordnung werden 60% der Sterblichkeitsraten aus der DAV 2008 T Tafel verwendet.

$$\prod_{j=1}^i (1 - lr_{j-1} - q_{x+j-1}) = \prod_{j=1}^i \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} [(1 - lapse(S_{j-1}) - q_{x+j-1})]$$

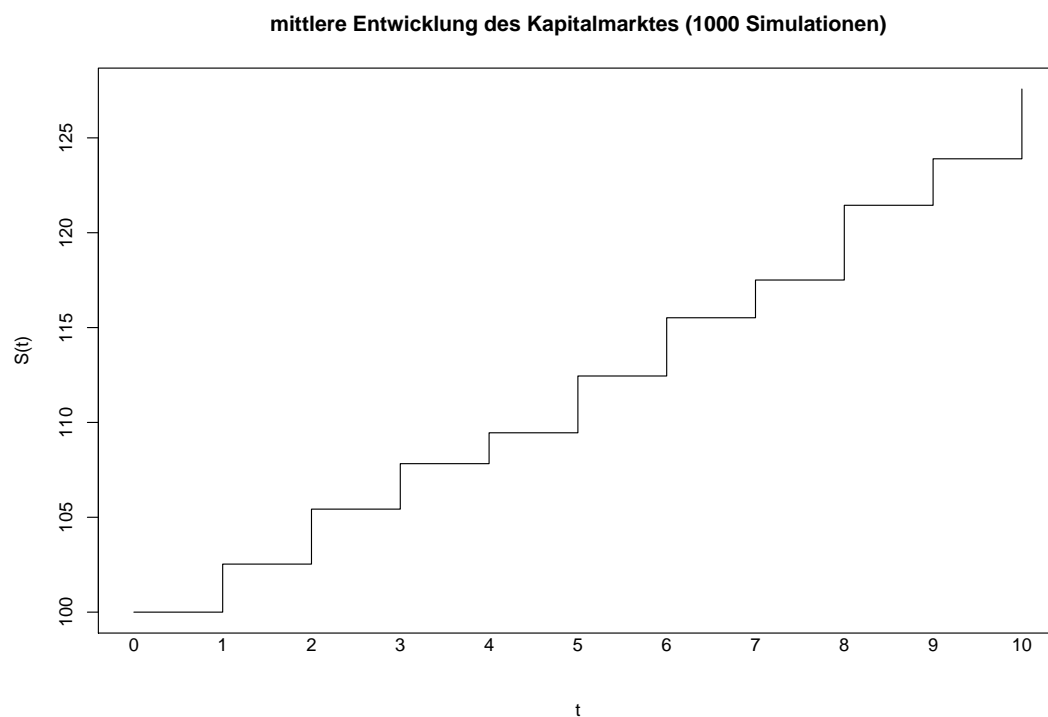
$$1 - lr_{j-1} - q_{x+j-1} = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} [1 - lapse(S_{j-1}) - q_{x+j-1}] \quad \forall j : 1 \leq j \leq i$$

$$lr_{j-1} = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} [lapse(S_{j-1})] \quad \forall j : 1 \leq j \leq i$$

Diese Aussage entspricht der Bedingung aus Gleichung 9 (siehe Abschnitt 2.8).

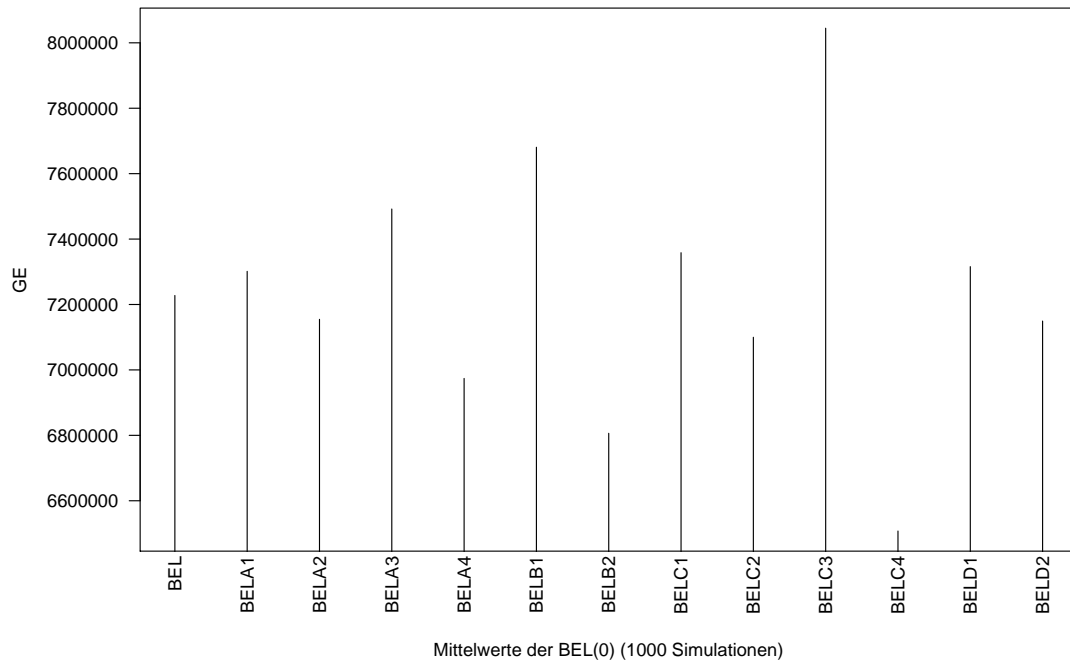
Für die Erstellung der Schaubilder in Kapitel 3 und 4 wurden folgende Parameter verwendet:

- deterministische Stornorate (lr): 10%
- massives Storno (lru): 17%
- massiver Stornorückgang (lrd): 3%
- risikoloser Zins (r): 2,25%, Drift (μ): 5,75%⁴², $S_0 = 100$ GE
- Laufzeit: 10 Jahre
- Versicherungsnehmer: 40 Jahre, männlich, Anzahl: 10000
- Versicherungssumme: 100000 GE
- Aktivseite: $ER = 1$

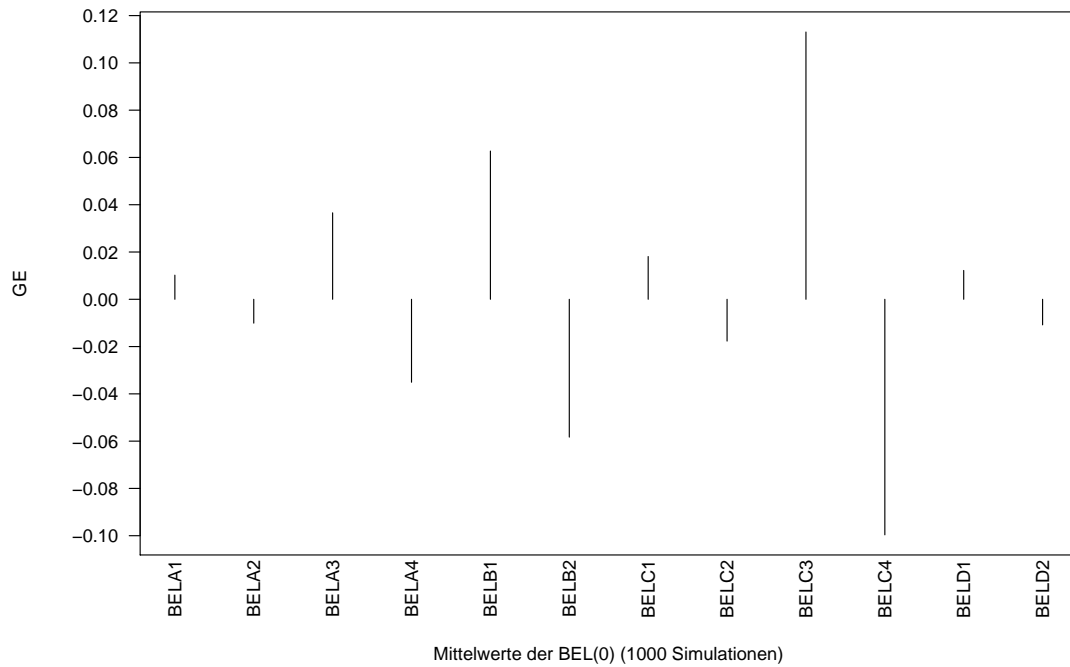


⁴²Daraus ergibt sich eine Volatilität von $\sigma = 16,7\%$.

BEL(0)



Prozentuale Abweichung von der deterministischen BEL(0)



3.1 Prämien

Die Prämien werden nach dem Äquivalenzprinzip berechnet. Für eine deterministische Stornorate wird eine deterministische Prämie kalkuliert, für stochastische Stornofunktionen wird für jeden Pfad eine Prämie kalkuliert und anschliessend der Mittelwert der Prämien berechnet. Der Mittelwert der Prämien wird im Folgenden als die vom Versicherungsnehmer zu zahlende Prämie (ohne den Teil der Prämie, der direkt in den Investmentfonds fließt) verwendet. Die Prämie wird wie folgt kalkuliert⁴³:

$$P = BEL(0) = VS \cdot VN \cdot \sum_{i=0}^{T-1} v^{i+1} {}_i p_x^{tot} q_{x+i} \quad (34)$$

⁴³ ${}_i p_x^{tot}$ definiert wie oben.

4 Berechnung des SCR

4.1 Die SCR-Formel

Ausgehend von den vier beschriebenen Risiken (vgl. Abschnitt 2.4) ergeben sich zunächst vier Kennziffern: SCR_{int} , SCR_{eq} , SCR_{mort} und SCR_{lapse} . SCR_{mkt} und SCR_{life} fassen jeweils das erforderliche Solvenzkapital resultierend aus den Marktrisiken beziehungsweise den Versicherungsrisiken (underwriting risks) zusammen. Sollte ein Risiko durch mehrere Stressszenarien beschrieben sein, so gilt es, das Szenario zu wählen, welches zum höchsten SCR-Wert führt.

Bei der Berechnung des SCR mithilfe der Stornofunktionen wird der Wert SCR_{lapse} nicht berechnet, da das Storno vollkommen auf die Entwicklung am Kapitalmarkt zurückgeführt wird und somit schon im SCR_{eq} erfasst ist.

Die SCR-Formel ist gegeben durch⁴⁴:

$$SCR = \sqrt{SCR_{mkt}^2 + 2 \cdot 0,25 \cdot SCR_{mkt} SCR_{life} + SCR_{life}^2} \quad (35)$$

$$SCR_{mkt} = \sqrt{SCR_{int}^2 + SCR_{eq}^2} \quad (36)$$

$$SCR_{life} = \sqrt{SCR_{mort}^2 + SCR_{lapse}^2} \quad (37)$$

4.1.1 SCR_{int}

Der vorgegebene Zinssatz r_t ist eine „forward rate“, die Zinsschocks der Solvency II Standardformel⁴⁵ beziehen sich auf „zero coupon bond rates“ z_t . Für die Umrechnung von „forward rates“ in „zero coupon bond rates“ wird folgende Formel verwendet⁴⁶:

$$(1 + z_{t+1})^{t+1} = (1 + z_t)^t (1 + r_{t,t+1}) \quad (38)$$

Der SCR-Wert ergibt sich aus der Differenz zwischen Asstets (A) und BEL vor und nach dem Zinsschock. Da es hier zwei Schockszenarien gibt, werden zunächst zwei SCR-Werte berechnet. Es gilt⁴⁷:

$$SCR_{int-up} = (A - BEL) - (A|_{up-shock} - BEL|_{up-shock}) \quad (39)$$

$$SCR_{int-down} = (A - BEL) - (A|_{down-shock} - BEL|_{down-shock}) \quad (40)$$

Der endgültige SCR-Wert ist das Maximum aus SCR_{int-up} , $SCR_{int-down}$ und Null⁴⁸:

$$SCR_{int} = \max(SCR_{int-up}, SCR_{int-down}, 0) \quad (41)$$

⁴⁴Die angegebene Formel führt zunächst zum BasicSCR, da es sich hier aber um ein vereinfachtes Modell handelt, gilt $BSCR = SCR$. Vgl. [EUR08b, Seite 124/128, 132-134 und 160-162].

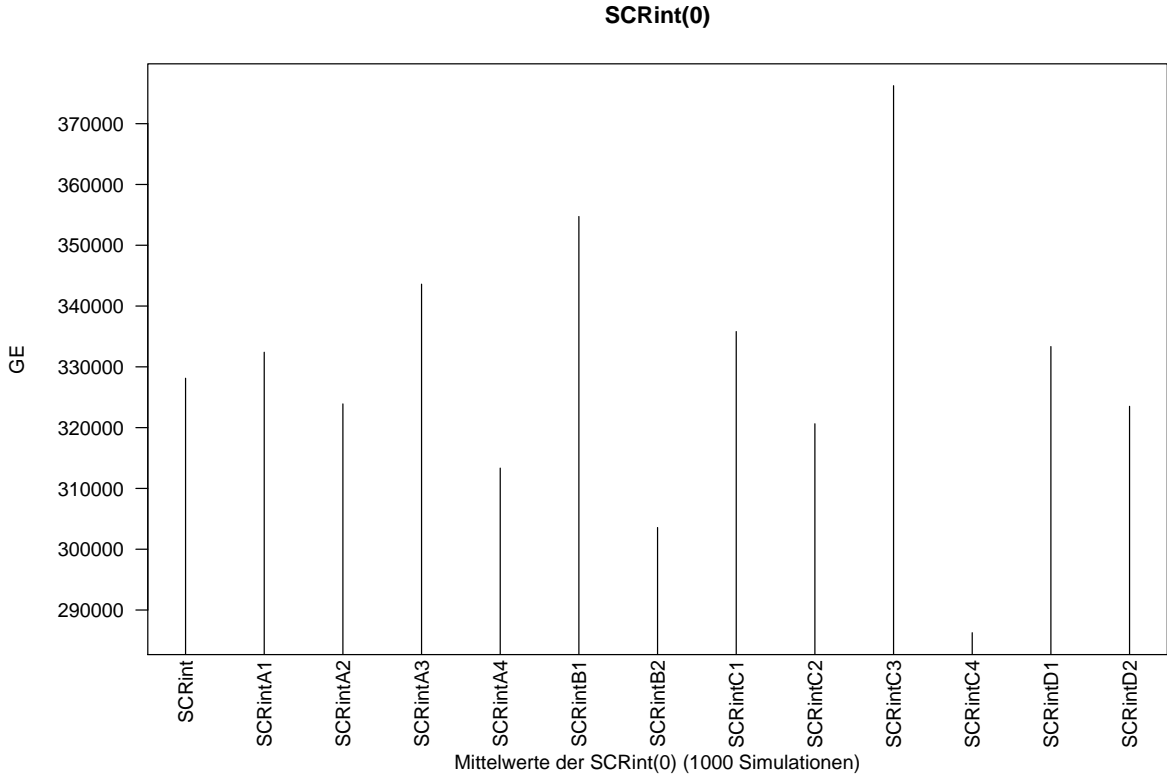
⁴⁵Vgl. dazu [EUR08b, Seite 136].

⁴⁶Vgl. dazu [EUR08b, Seite 245-247].

⁴⁷Vgl. dazu [EUR08b, Seite 135].

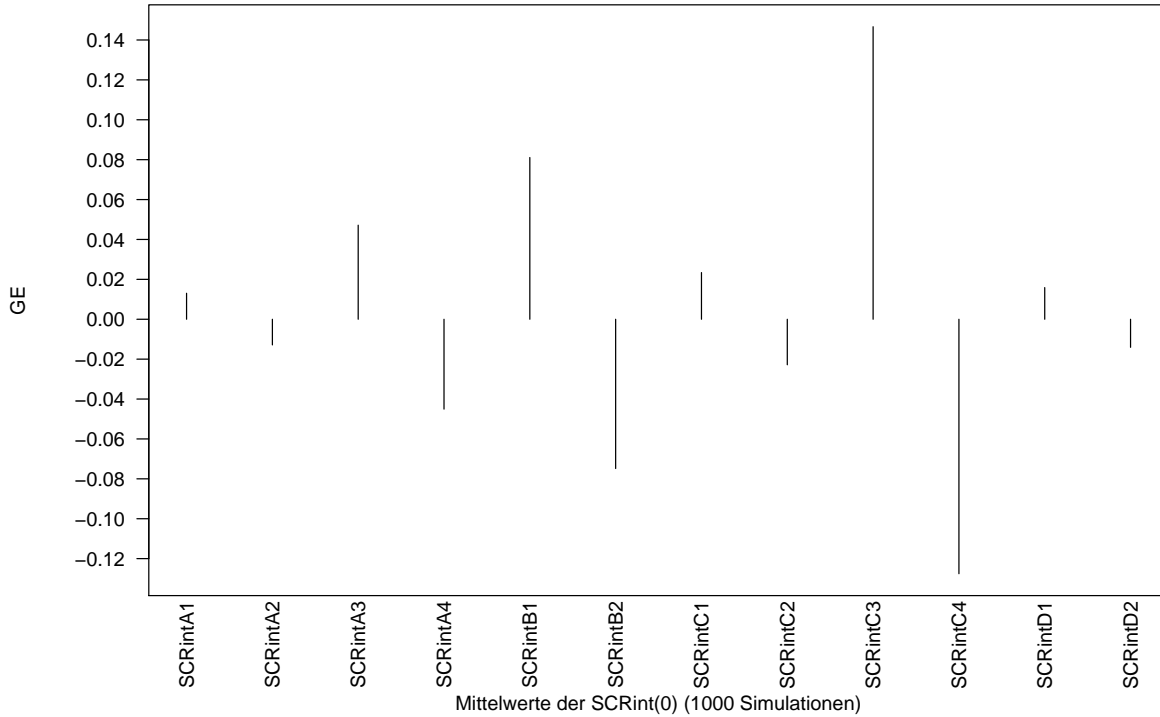
⁴⁸Vgl. dazu [EUR08b, Seite 136].

Die Standardformel in Solveny 2 geht davon aus, dass es keine Zusammenhänge zwischen der Zinsentwicklung und der Entwicklung auf dem Kapitalmarkt gibt⁴⁹. Andererseits wird die Entwicklung des Kapitalmarktes im vorliegenden Modell hauptsächlich auf den risikofreien Zins zurückgeführt. Um der Standardformel Rechnung zu tragen wird bei der Berechnung des SCR_{int} unterstellt, dass eine Zinsänderung keine Auswirkung auf den Kapitalmarkt und somit auch keine indirekte Auswirkung auf die Stornoraten hat.



⁴⁹Vgl. dazu [EUR08b, Seite 134]. Allerdings wurde diese Annahme von einigen an QIS 4 teilnehmenden Versicherern kritisiert und soll überprüft werden (vgl. [EUR08a, Seite 12, 176 und 187]).

Prozentuale Abweichung vom deterministischen SCRint(0)



4.1.2 SCR_{eq}

Die Berechnung des SCR_{eq} erfolgt mit folgender Formel⁵⁰:

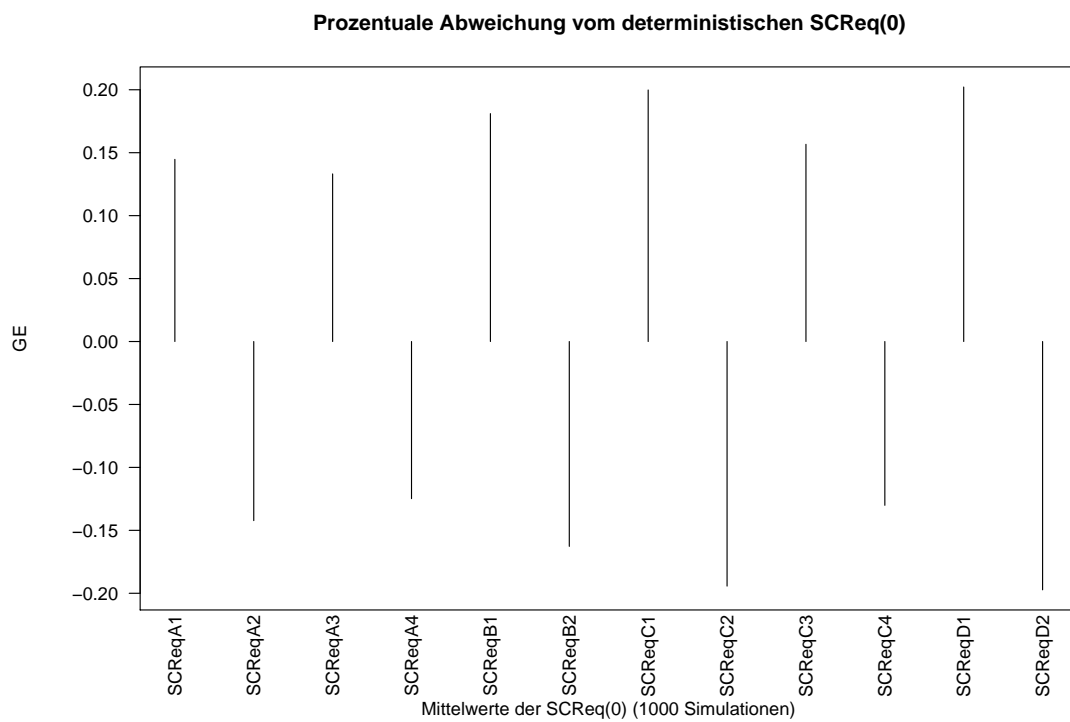
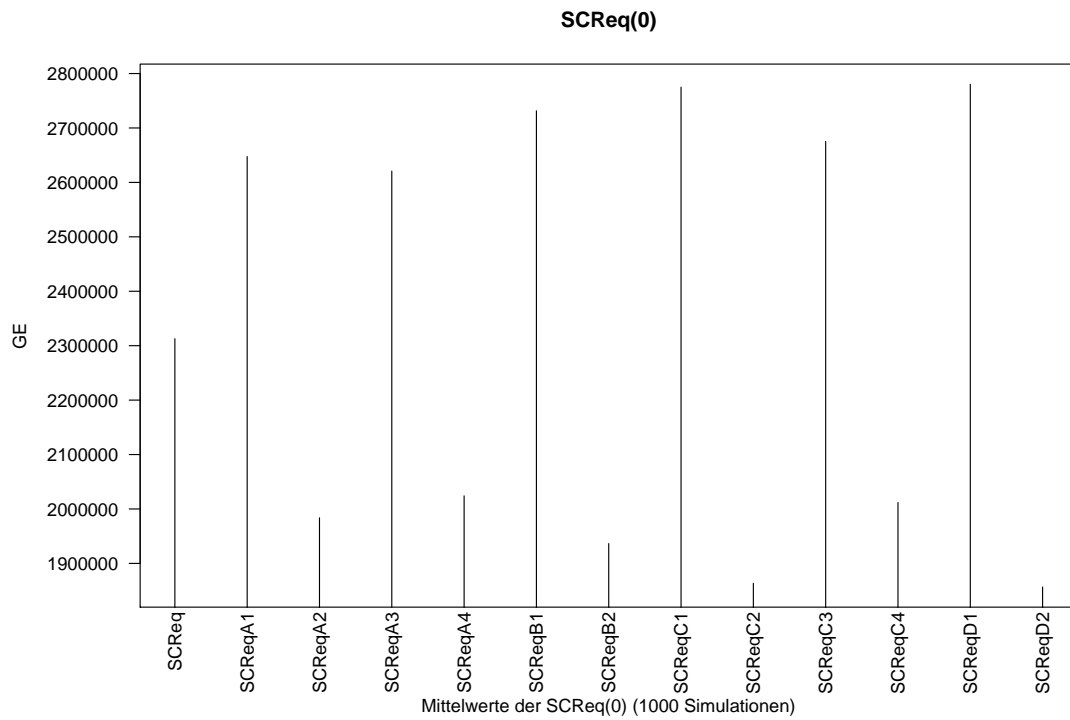
$$SCR_{eq-up} = (A - BEL) - (A|_{up-shock} - BEL|_{up-shock}) \quad (42)$$

$$SCR_{eq-down} = (A - BEL) - (A|_{down-shock} - BEL|_{down-shock}) \quad (43)$$

$$SCR_{eq} = \max(SCR_{eq-up}, SCR_{eq-down}, 0) \quad (44)$$

Im deterministischen Fall hat der „equity-shock“ keine Auswirkung auf die BEL, bei Verwendung der Stornofunktionen schlägt sich der „equity-shock“ über veränderte Stornoraten in der BEL nieder. Das gesamte Stornorisiko wird also hier erfasst.

⁵⁰Vgl. dazu [EUR08b, Seite 138].



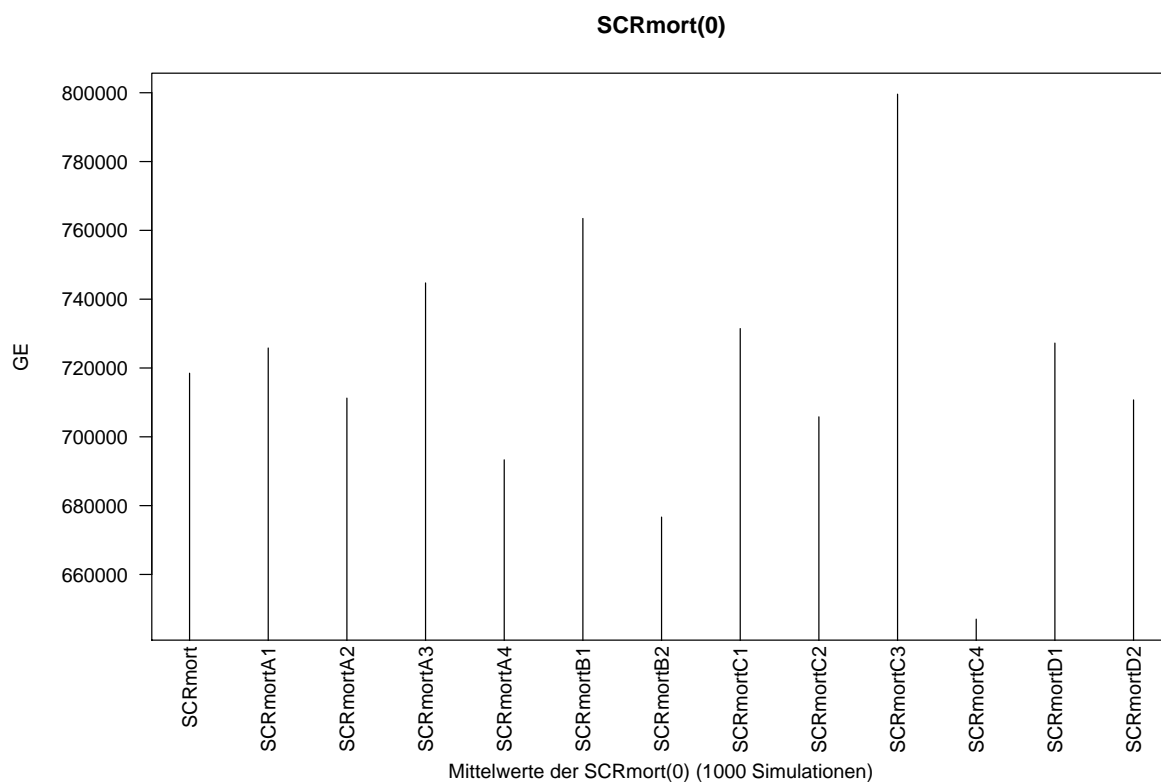
4.1.3 SCR_{mort}

Die Berechnung des SCR_{mort} erfolgt mit folgender Formel⁵¹:

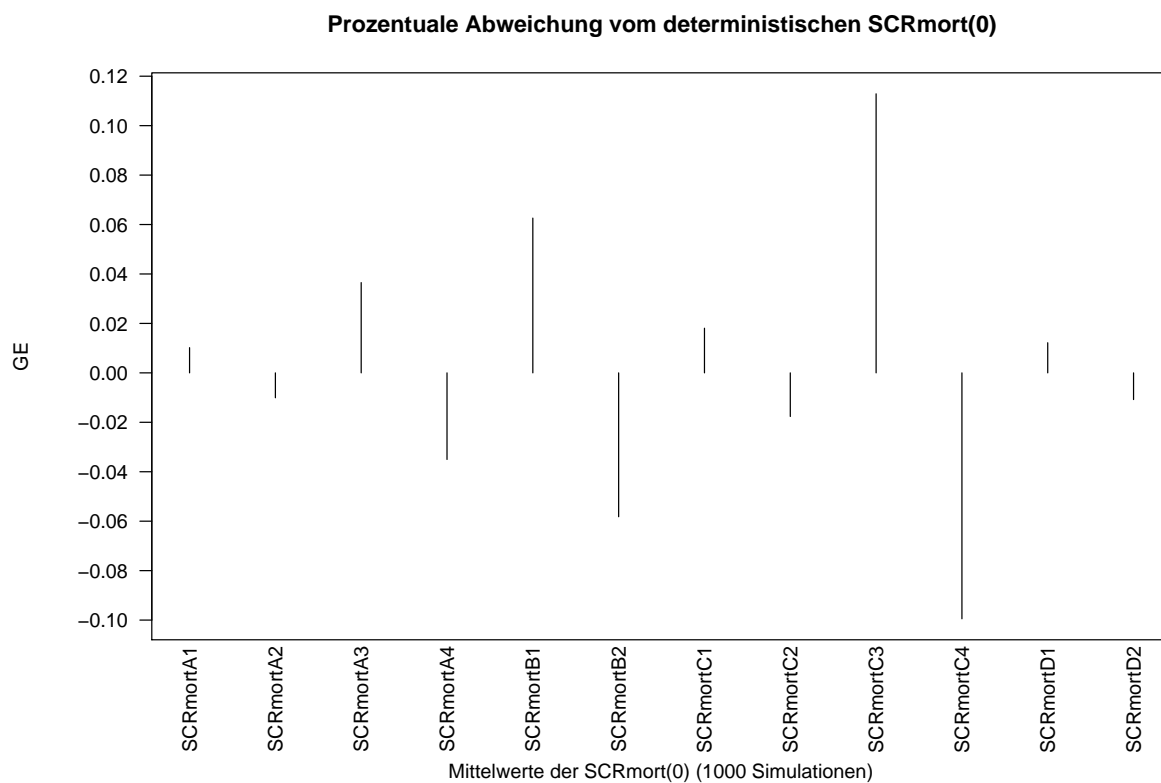
$$SCR_{mort} = (A - BEL) - (A|_{mortshock} - BEL|_{mortshock}) \quad (45)$$

$$SCR_{mort} = \max(SCR_{mort}, 0) \quad (46)$$

Der „mortshock“ wirkt sich durch die Todesfalleistung auch auf die zukünftige Entwicklung der Assets aus.



⁵¹Vgl. dazu [EUR08b, Seite 163].



4.1.4 SCR_{lapse}

Wie in Abschnitt 2.9 erläutert, werden nur die zwei Szenarien $Lapse_{down}$ und $Lapse_{up}$ betrachtet⁵²:

$$SCR_{lapse-up} = (A - BEL) - (A|_{up-shock} - BEL|_{up-shock}) \quad (47)$$

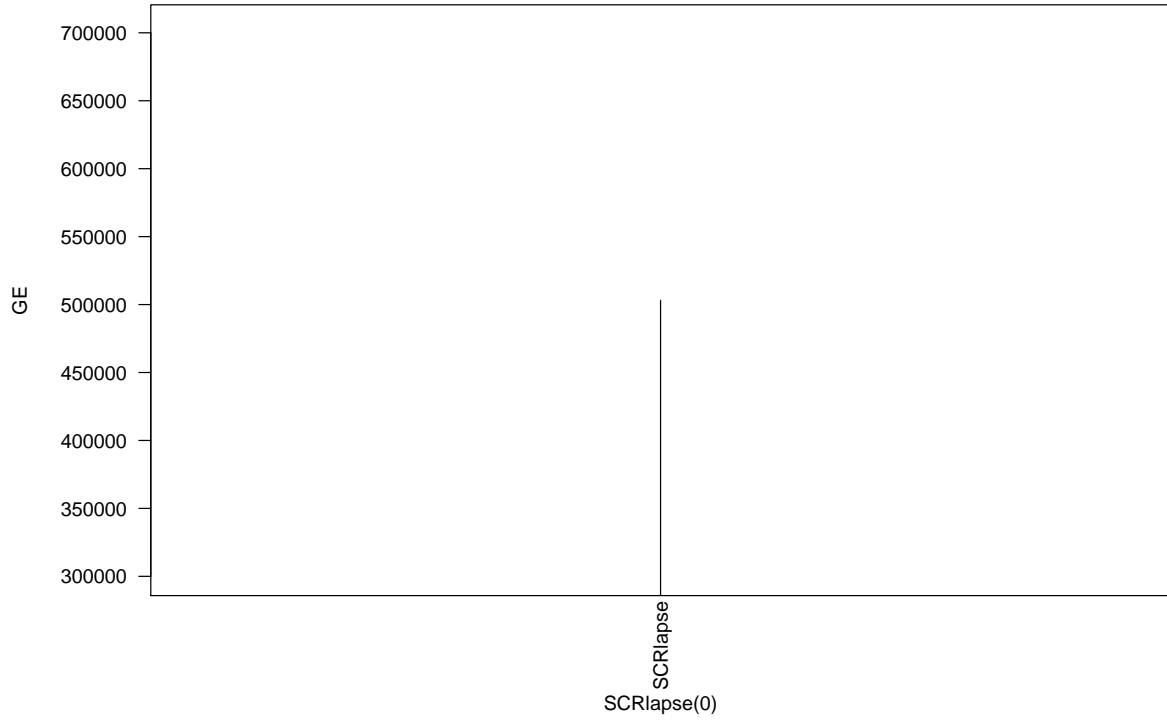
$$SCR_{lapse-down} = (A - BEL) - (A|_{down-shock} - BEL|_{down-shock}) \quad (48)$$

$$SCR_{lapse} = \max(SCR_{lapse-up}, SCR_{lapse-down}, 0) \quad (49)$$

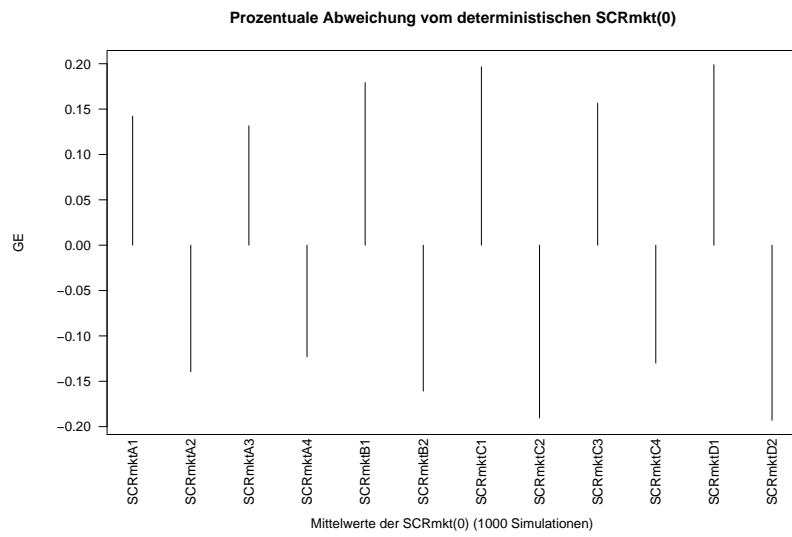
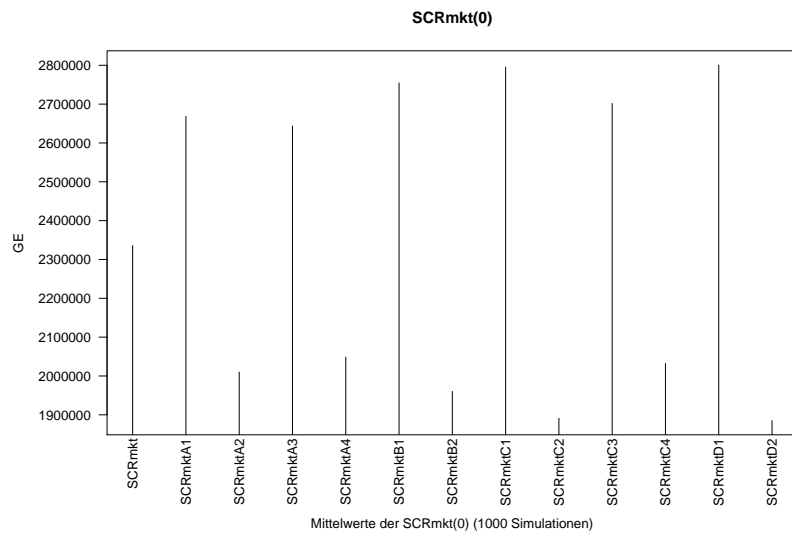
Das SCR_{lapse} wird nur für den deterministischen Fall berechnet, da das Stornorisiko bei Verwendung der Stornofunktionen im SCR_{eq} erfasst wird.

⁵²Vgl. dazu [EUR08b, Seite 167].

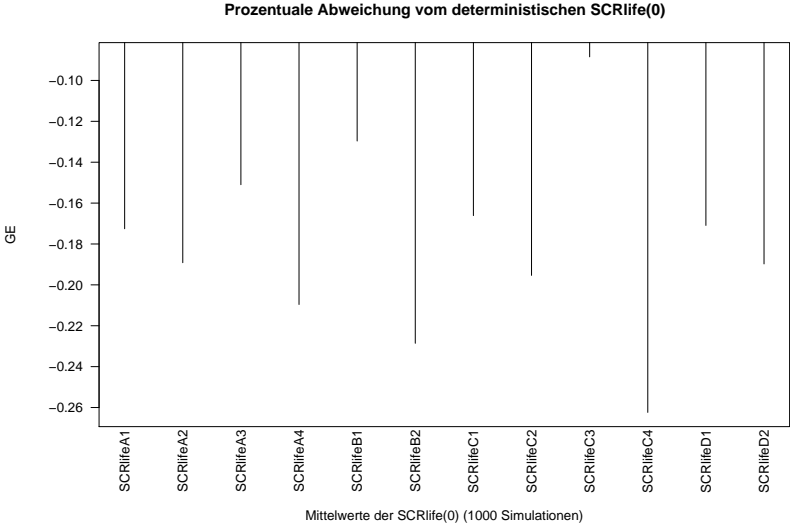
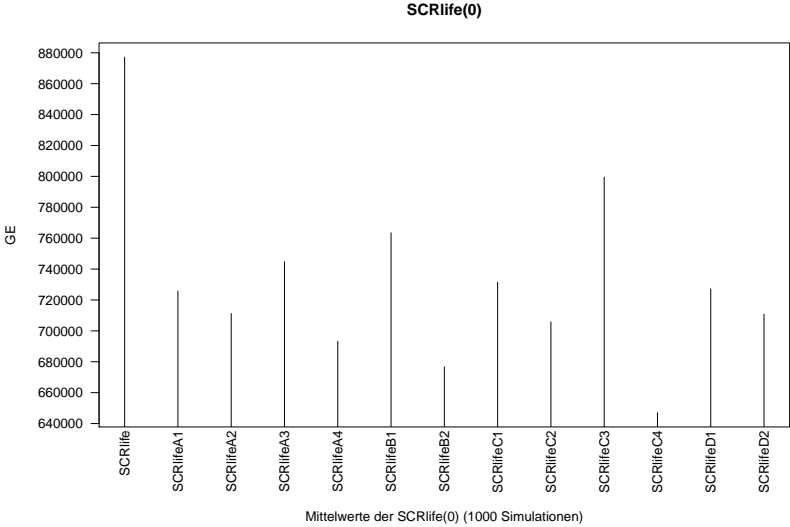
SCRlapse(0)



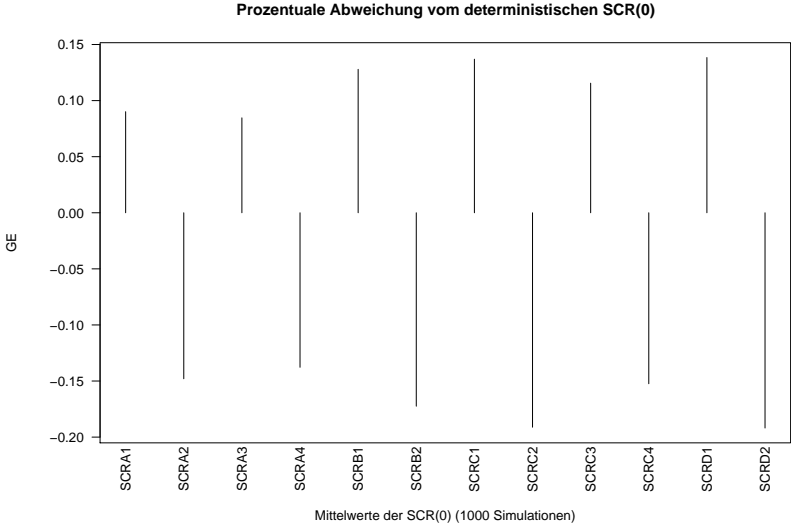
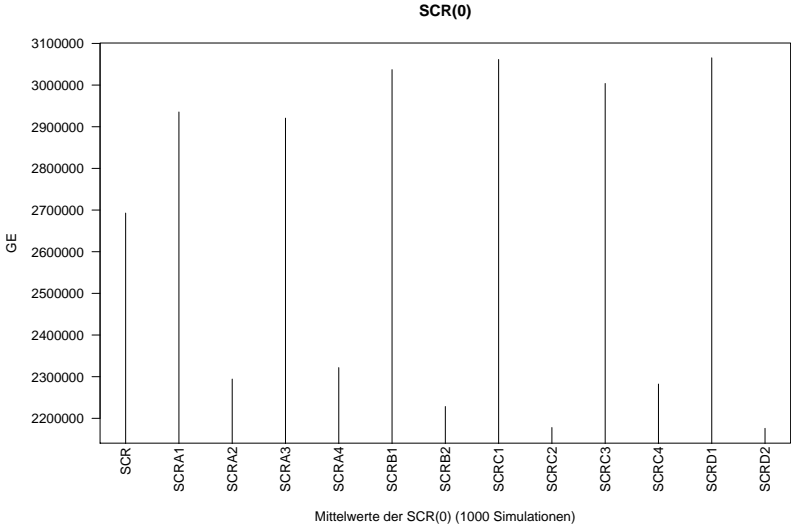
4.1.5 SCR_{mkt}



4.1.6 SCR_{life}



4.1.7 SCR



5 Sensitivitätsanalyse

Im Rahmen einer Sensitivitätsanalyse soll nun der Einfluss der relevanten Parameter auf das Solvenzkapital untersucht werden. Dabei sind besonders die deterministische Stornorate, die Laufzeit und das Verhältnis von Assets zu BEL von Interesse. Es werden folgende Parameterwerte untersucht:

- deterministische Stornorate (lr): 5%, 10%, 15%, 20%
- Laufzeit: 5, 10, 15, 20 Jahre
- Asset-BEL-Ratio: 0, 1, 1.25, 1.5, 1.75, 2

Die weiteren Parameter sind wie folgt gewählt:

- massives Storno (lru): 17%
- massiver Stornorückgang (lrd): 3%
- risikoloser Zins (r): 2, 25%, Drift (μ): 5, 75%⁵³, $S_0 = 100$ GE
- Versicherungsnehmer: 40 Jahre, männlich, Anzahl: 10000
- Versicherungssumme: 100000 GE
- Aktivseite: $ER = 1$
- zur Vereinfachung wurde in allen Fällen die deterministische Einmalprämie verwendet.

⁵³Daraus ergibt sich eine Volatilität von $\sigma = 16,7\%$.

5.1 Kalibrierungsfehler

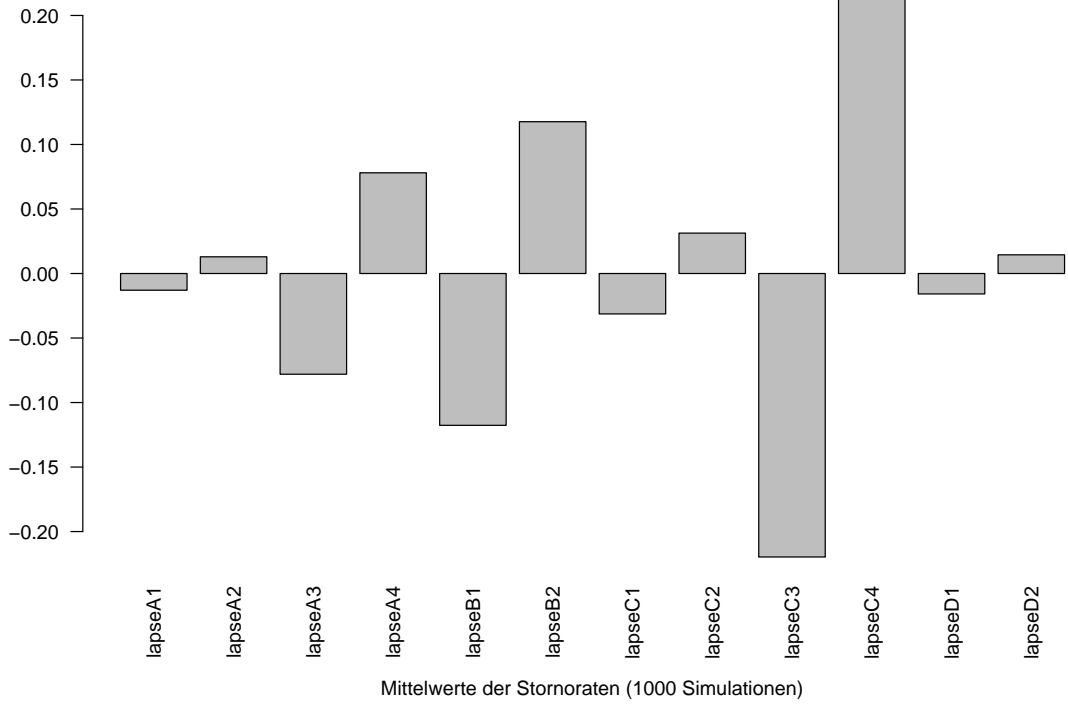
Der jährliche prozentuale Kalibrierungsfehler (die prozentuale Abweichung des Mittelwertes der stochastisch erzeugten Stornoraten von der deterministischen Stornorate für ein Jahr) soll als Maßstab für ausreichend gut kalibrierte Stornofunktionen dienen. Dabei erweisen sich erwartungsgemäß die Stornofunktionen A1/A2, C1/C2 sowie D1/D2 als geeignet (der Fehler liegt unter 5%). Als weiteres Kriterium für eine gute Kalibrierung kann die Abweichung des Mittelwertes der stochastischen BEL von den deterministischen BEL dienen. Auch hier überzeugen die oben genannten Stornofunktionen, wobei die Abweichung der BEL mit der Laufzeit natürlich etwas zunimmt (hier liegt der Fehler bei maximal 5,3%).

Die Existenz der Kalibrierungsfehler beruht auf der Tatsache, dass zunächst eine deterministische Stornorate festgelegt wurde und anschließend Stornofunktionen konstruiert wurden, die aber nicht erwartungstreu sind. Besonders bei den Stornofunktionen A3/A4 und C3/C4 führt das zu großen Kalibrierungsfehlern und somit zu einer unerwünschten Einschränkung bei der Modellierung des dynamischen Stornoverhaltens. Dies kann behoben werden, indem nicht die deterministische Stornorate (und damit auch lru und lrd) als Parameter für Stornofunktionen verwendet sondern dieser frei angepasst wird (z. B. durch Iteration) um ein gewünschtes durchschnittliches Storno zu bekommen. Ein solches Verfahren eliminiert den Kalibrierungsfehler vollständig.

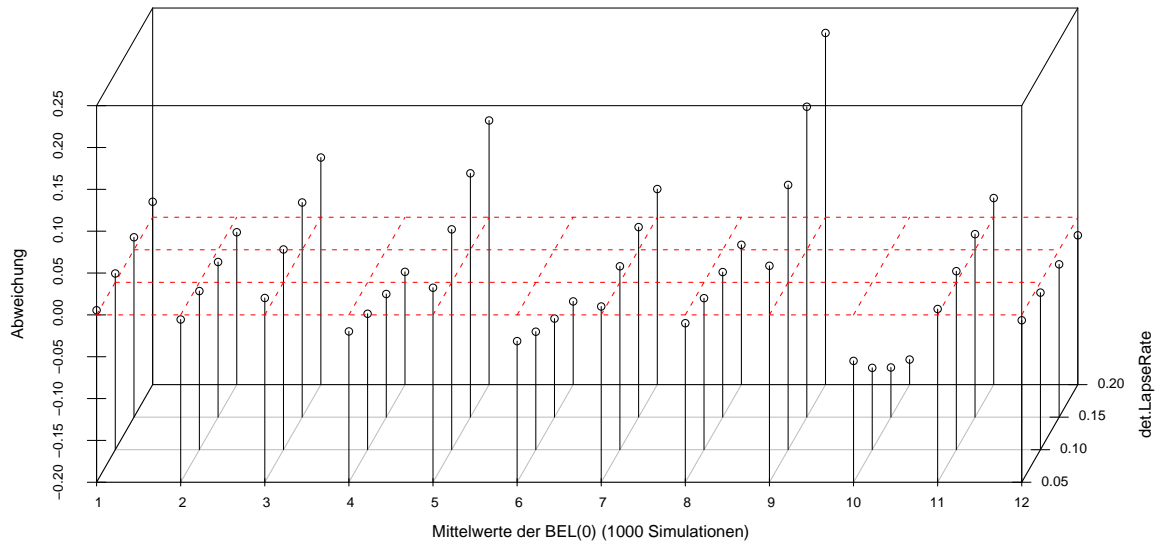
Der Vergleich des Mittelwertes des stochastischen Solvenzkapitals ohne Assets mit dem deterministischen SCR ist ein weiterer Hinweis auf eine gelungene Kalibrierung, dabei wird lediglich das gesamte SCR_{lapse} in das SCR_{eq} verschoben. Da es keine Assets gibt und somit Diversifikationseffekte entfallen, sollte das Gesamt-Solvvenzkapital konstant bleiben⁵⁴.

⁵⁴Siehe dazu Abschnitt 5.4.

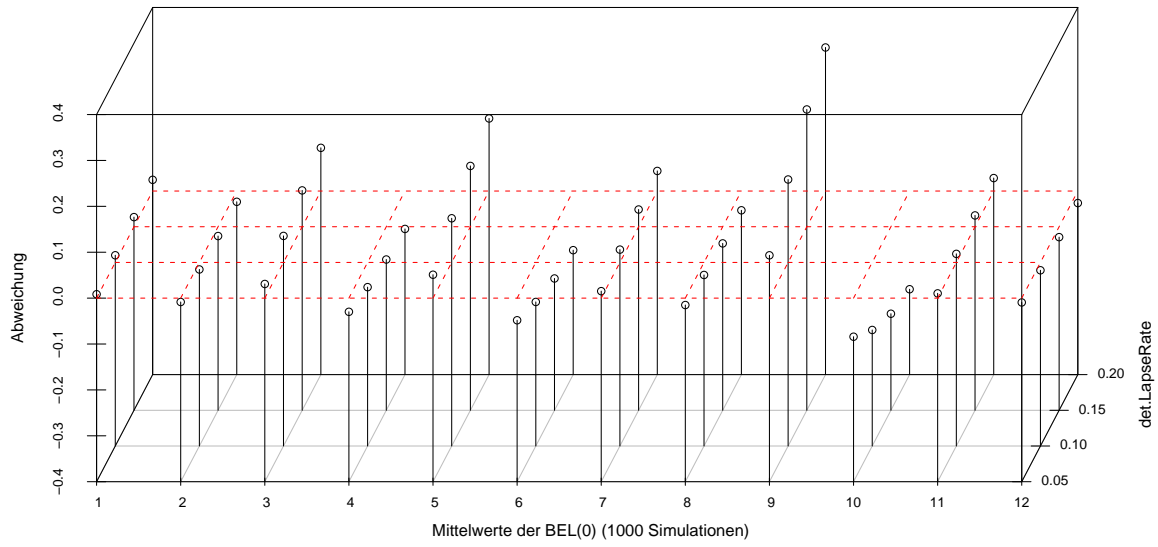
Prozentuale Abweichung von der deterministischen Stornorate für ein Jahr



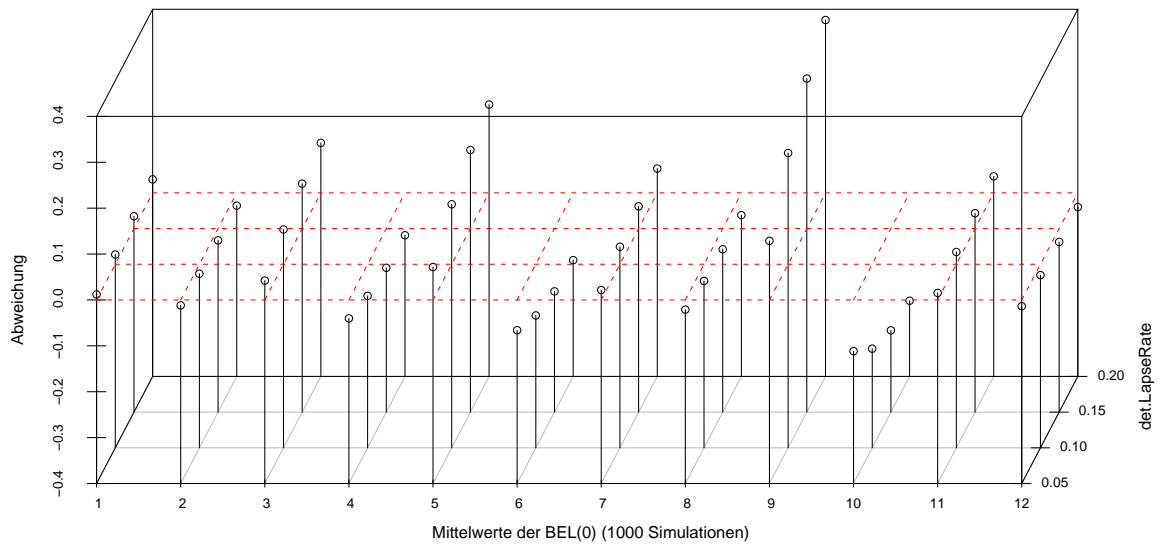
Prozentuale Abweichung von der deterministischen BEL(0), Laufzeit: 10 Jahre



Prozentuale Abweichung von der deterministischen BEL(0), Laufzeit: 15 Jahre

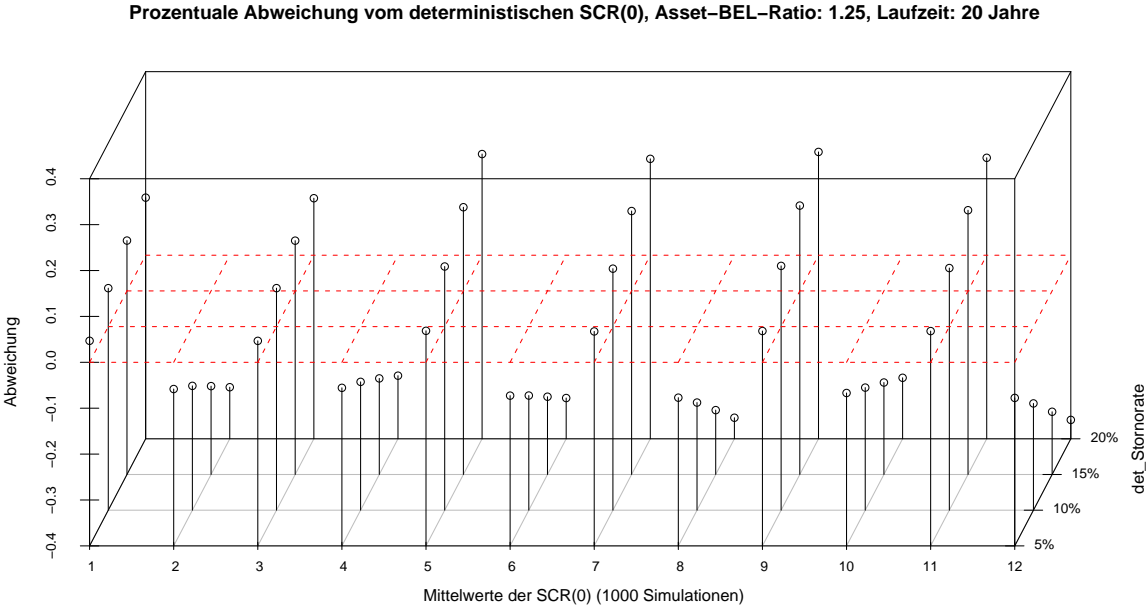


Prozentuale Abweichung von der deterministischen BEL(0), Laufzeit: 20 Jahre



5.2 Deterministische Stornorate

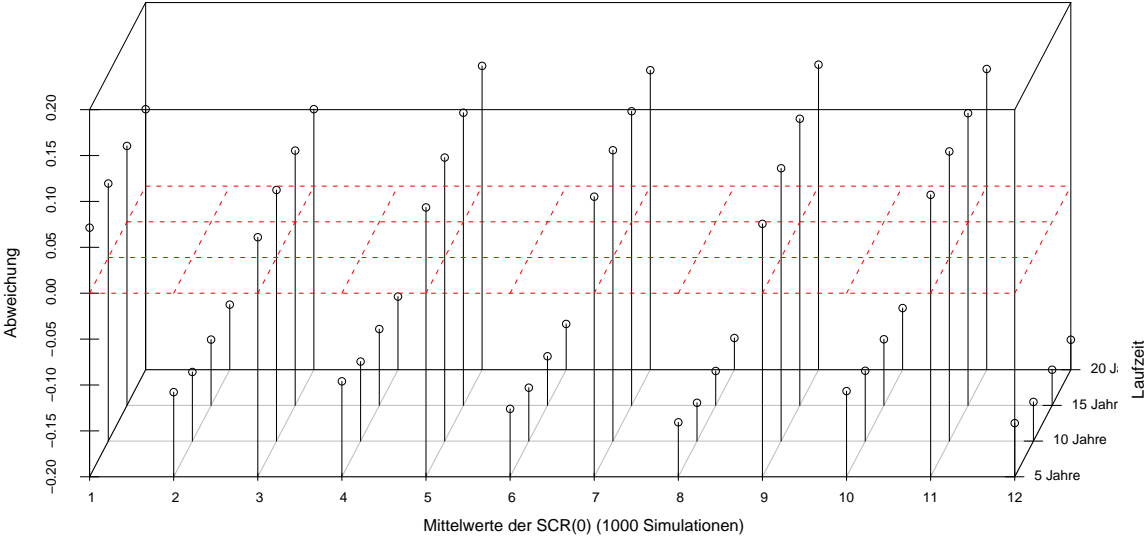
Durch eine Erhöhung der deterministischen Stornoraten und somit auch Verstärkung der Stressszenarien wurde das Solvenzkapital absolut wie auch relativ zum deterministischen Solvenzkapital erhöht. Die modellbedingte Annahme, dass hohe Durchschnitts-Stornoraten auch eine hohe Volatilität der stochastischen Stornoraten implizieren, wird durch die prozentuale Zunahme der Abweichung des stochastischen Solvenzkapitals vom deterministischen Solvenzkapital wiedergegeben.



5.3 Laufzeit

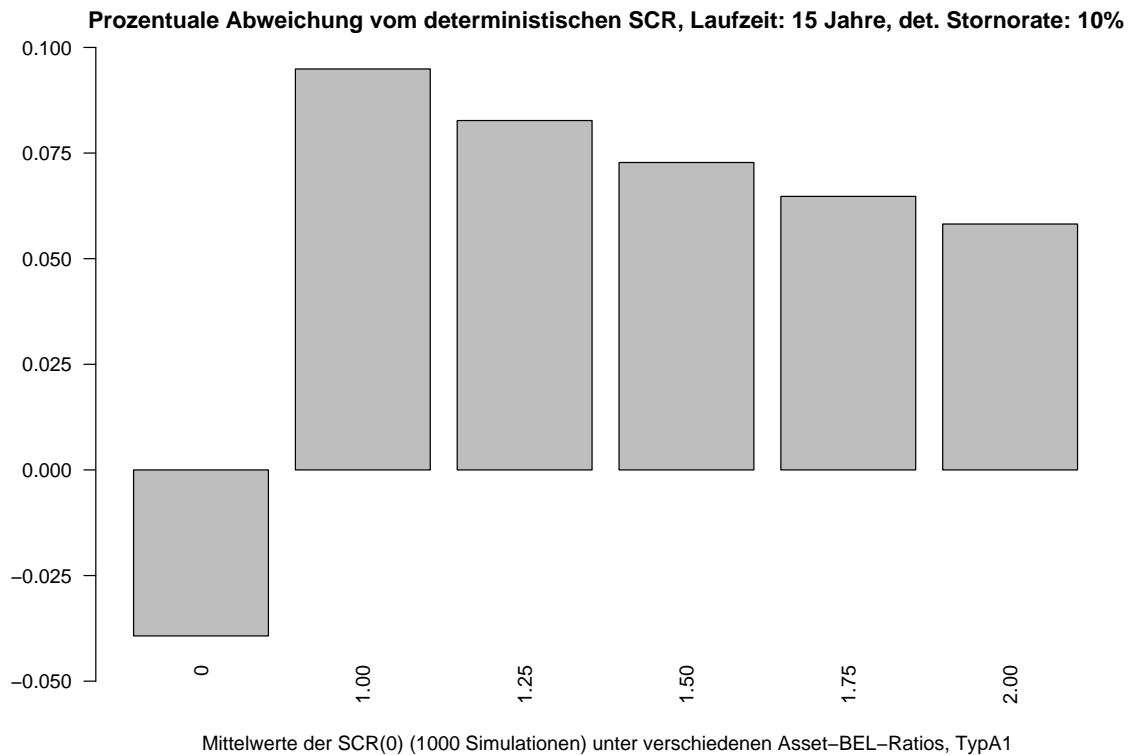
Die prozentuale Abweichung des Mittelwertes des stochastischen Solvenzkapitals vom deterministischen Wert ist über die Laufzeit konstant.

Prozentuale Abweichung vom deterministischen SCR(0), Asset-BEL-Ratio: 1.25, det. Stornorate: 10%



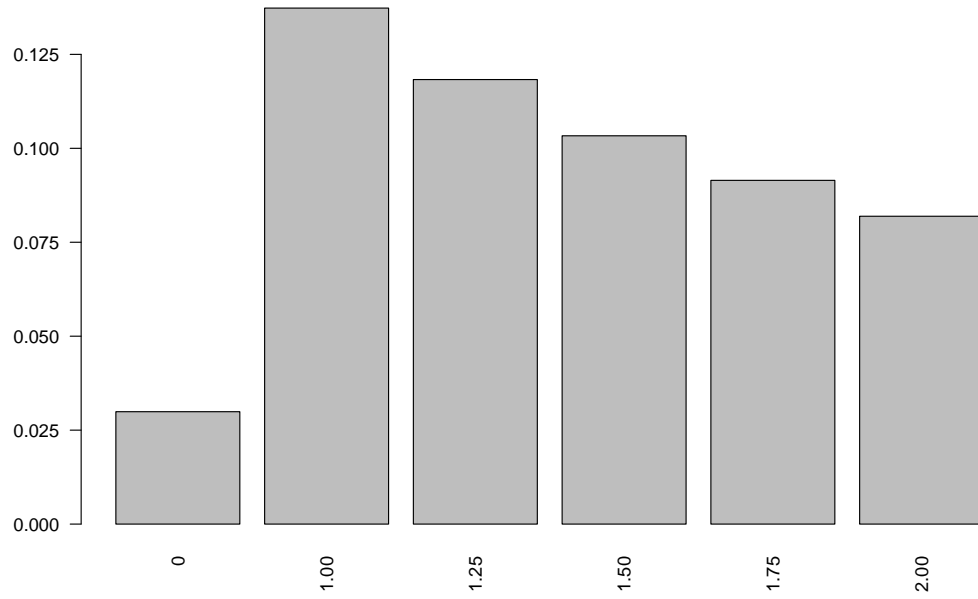
5.4 Asset-BEL-Verhältnis

Zunächst beschreibt die Abweichung des Solvenzkapitals unter dem Asset-BEL-Ratio Null den Modellfehler. Mit den Stornofunktionen A1/A2, C1/C2 und D1/D2 lässt sich der Modellfehler fast überall auf 5% beschränken. Je nach Verhaltensweise der Versicherungsnehmer führt die Berücksichtigung von dynamischem Storno zu erheblichen Schwankungen im Solvenzkapital. Dabei sind die Schwankungen extremer, je schlechter die Asset-Ausstattung des Versicherers ist⁵⁵.



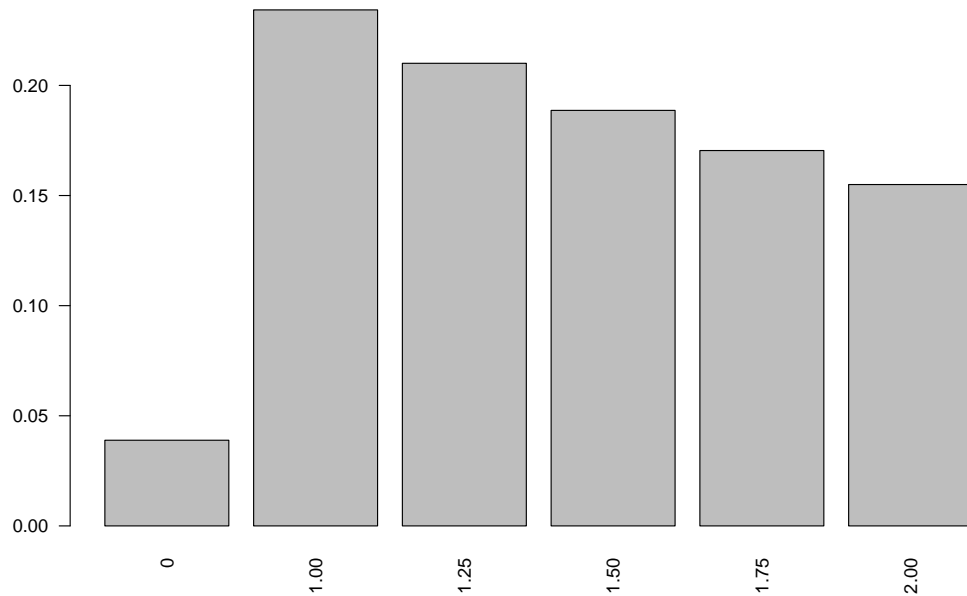
⁵⁵Dabei wurde die Asset-Menge, die gerade zur Deckung der BEL ausreicht, als natürliche untere Grenze gewählt.

Prozentuale Abweichung vom deterministischen SCR, Laufzeit: 15 Jahre, det. Stornorate: 10%



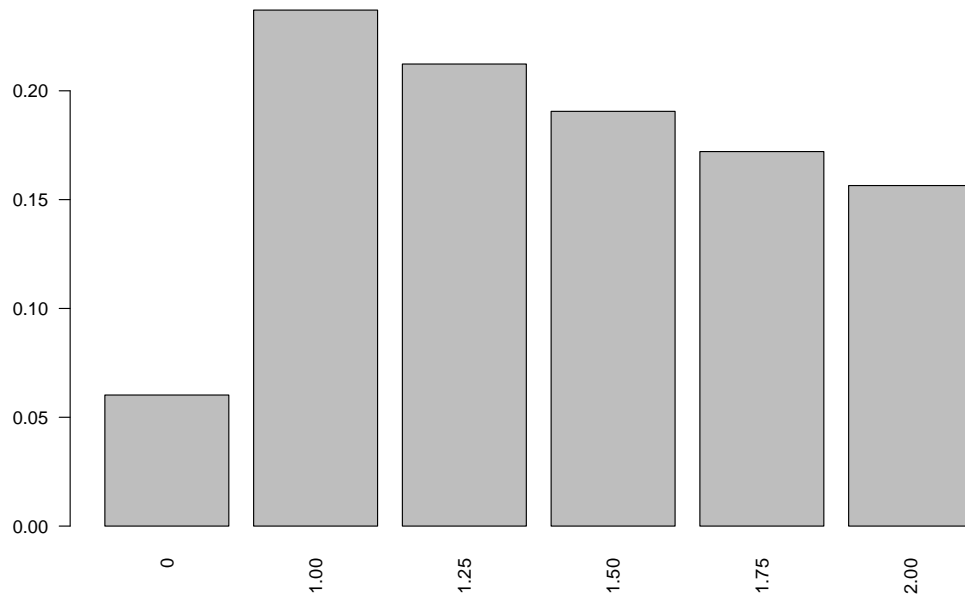
Mittelwerte der SCR(0) (1000 Simulationen) unter verschiedenen Asset-BEL-Ratios, TypD1

Prozentuale Abweichung vom deterministischen SCR, Laufzeit: 20 Jahre, det. Stornorate: 20%



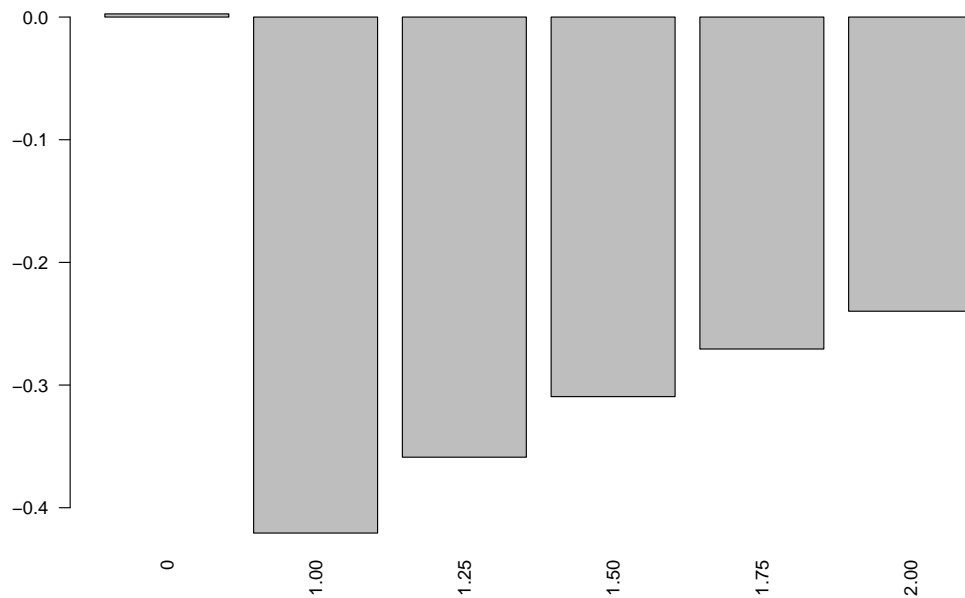
Mittelwerte der SCR(0) (1000 Simulationen) unter verschiedenen Asset-BEL-Ratios, TypC1

Prozentuale Abweichung vom deterministischen SCR, Laufzeit: 20 Jahre, det. Stornorate: 20%



Mittelwerte der SCR(0) (1000 Simulationen) unter verschiedenen Asset-BEL-Ratios, TypD1

Prozentuale Abweichung vom deterministischen SCR, Laufzeit: 20 Jahre, det. Stornorate: 20%



Mittelwerte der SCR(0) (1000 Simulationen) unter verschiedenen Asset-BEL-Ratios, TypD2

6 Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit konnte anhand eines speziellen Versicherungsproduktes gezeigt werden, dass die Aufteilung in „hedgeable“ und „non-hedgeable“ eine große Vereinfachung bei der Berechnung des Solvenzkapitals sein kann. Allerdings birgt diese auch die Gefahr, das Risiko erheblich zu unter- bzw. überschätzen. Die Kritik von Kriele und Wolf am Vorgehen in Solvency II⁵⁶ konnte bestätigt werden und eine Aufteilung von Versicherungsprodukten bedarf einer intensiven Risikountersuchung.

An dieser Stelle sei erwähnt, dass es in Solvency II noch keine konkreten Vorgaben gibt, wie mit fondsgebundenen Versicherungsprodukten umgegangen werden soll. QIS 4 hat gezeigt, dass viele Versicherer diesbezüglich nicht sensibilisiert sind und gar kein Solvenzkapital für diese Produktart ausweisen⁵⁷. Darüberhinaus konnte in dieser Arbeit ein umfassender Überblick über aktuelle Untersuchungen zu dynamischem Stornoverhalten gegeben werden. Desweiteren konnte ein Ansatz vorgestellt werden, intuitive Stornofunktionen zu konstruieren.

Mit der Kalibrierung des Modells an die Standardformel von Solvency II sowie der Festlegung einer a priori deterministischen Stornorate waren einige Kompromisse und Einschränkungen verbunden. Die Verwendung eines differenzierteren Kapitalmarktmodells oder die Berechnung eines mathematischen SCR⁵⁸ erscheint interessant, wenn auch nicht notwendig.

Die Erweiterung des Modells auf allgemeine fondsgebundene Versicherungsprodukte unter Berücksichtigung anderer Auszahlungsfunktionen im Todesfall sowie Garantien und Kosten ist erstrebenswert. Darüberhinaus sollte das dynamische Stornoverhalten zusätzlich von den Renditen weiterer vergangener Perioden und von der Restlaufzeit des Versicherungsvertrages abhängen.

Insgesamt ist eine Untersuchung der Risiken bei fondsgebundenen Versicherungsprodukten im Rahmen von Solvency II und damit verbunden ein Verfahren zur Kalkulation des Solvenzkapitals für diese Produkte notwendig.

⁵⁶Vgl. [KW07].

⁵⁷Vgl. [EUR08a, Seite 75].

⁵⁸Im Sinne von [BBR09].

Literatur

- [Ame05] AMERICAN ACADEMY OF ACTUARIES: *Recommended Approach for Setting Regulatory Risk-Based Capital Requirements for Variable Annuities and Similar Products*. 2005
- [BBR09] BAUER, Daniel ; BERGMANN, Daniela ; REUSS, Andreas: *Solvency II and Nested Simulations: a Least-Squares Monte Carlo Approach*. 2009
- [CEG08] CERCHIARA, Rocco R. ; EDWARDS, Matthew ; GAMBINI, Alessandra: Generalized linear models in life insurance: decrements and risk factor analysis under Solvency II. In: *18th International AFIR Colloquium* (2008)
- [DG08] DE GIOVANNI, Domenico: Lapse Rate Modeling: A Rational Expectation Approach. In: *Scandinavian Actuarial Journal* (2008)
- [Edw09] EDWARDS, Matthew: *Policyholder behaviour and advanced retention analysis*. 2009
- [EUR08a] EUROPEAN COMMISSION: *QIS4 Report*. 2008
- [EUR08b] EUROPEAN COMMISSION: *QIS4 Technical Specifications*. 2008
- [GDV05] GDV: *Diskussionsbeitrag für einen Solvency II kompatiblen Standardansatz*. 2005
- [HPP07] HOCHREITER, Ronald ; PFLUG, Georg ; PAULSEN, Volkert: Design and management of unit-linked life insurance contracts with guarantees. In: *Handbook of Asset and Liability Management 2* (2007), S. 627–662
- [Kli07] KLING, Alexander: Modellierung, Bewertung und Risikoanalyse von Zinsgarantien in konventionellen deutschen Lebensversicherungsverträgen. In: *ifa-Schriftenreihe* (2007)
- [KT06] KOLKIEWICZ, Adam W. ; TAN, Ken S.: Unit-linked life insurance contracts with lapse rates dependent on economic factors. In: *Annals of actuarial science* 1 (2006), S. 49–78
- [KTC03] KUO, Weiyu ; TSAI, Chengsien ; CHEN, Wei-Kuang: An empirical study on the lapse rate: the cointegration approach. In: *The Journal of Risk and Insurance* 70 (2003), Nr. 3, S. 489–508
- [KW07] KRIELE, Marcus ; WOLF, Jochen: On market value margins and cost of capital. In: *DAV / DGVFM* 28 (2007), S. 195–219
- [MH07] MAUER, Laurence ; HOLDEN, Neil: Determinants of the lapse rate in life insurance operating companies. In: *Review of Business* 28 (2007), Nr. 1, S. 54–64

- [Mil09] MILLIMAN: *Variable Annuities, MCC Workshop VAs*. 2009
- [Pel08] PELSSER, Prof. Dr. A.: Market Valuation of Insurance Liabilities. In: *ING Insurance ALM Seminar* (2008)
- [Shr00] SHREVE, Steven E.: *Stochastic Calculus for Finance 2*. Springer, 2000. – ISBN 0387401016
- [Smi01] SMINK, Meye: Risk Measurement for Asset Liability Matching, A simulation Approach to single premium deferred Annuities. In: *2nd AFIR Colloquium 2* (2001), S. 75–92
- [Swi03] SWISSRE: Unit-linked life insurance in Western Europe: regaining momentum? In: *Sigma* 3 (2003)
- [The06] THE CHIEF RISK OFFICER FORUM: *A market cost of capital approach to market value margins*. 2006
- [Zen99] ZENIOS, Stavros A.: *Financial Optimization*. Cambridge University Press, 1999. – ISBN 0521419050