Universität Ulm
Britta Dorn
Michaela Eskin-Hämmerle

Übungen zum Seminar
Grundlagen der Mathematik
Blatt 9 (Bonusblatt)

Dieses Blatt ist ein Bonusblatt. **Abgabe ist am Montag, den 9.1.12 vor der Übung.** Studenten aus dem Dienstagstutorium, die zu Beginn des Montagstutorium nicht anwesend sein können, können ihr Blatt vorher bei Michaela im Büro abgeben oder es einem Kommilitonen mitgeben.

Bonusaufgabe 1 (2,5 Punkte)

Führe folgende Konstruktion durch:
Ein siebenstrahliger Stern
Zeichne in einen Kreis den Radius $\overline{MP}$ ein. (Dabei bezeichne M den Mittelpunkt des Kreises, P einen Punkt auf dem Kreisrand und $\overline{MP}$ die Strecke zwischen M und P.) Setze den Zirkel beim Punkt P an und schlage mit dem Radius $\overline{MP}$ einen Bogen innerhalb des Kreises. Wo dieser Bogen links den Kreis schneidet, setze den Punkt A. Sei Q der Mittelpunkt der Stecke $\overline{MP}$. Trage die Strecke AQ siebenmal auf dem Kreisrand ab. Verbinde diese 7 Punkte, so entsteht ein Siebeneck.
Nehme nun wieder etwas mehr als die Strecke AQ in den Zirkel, steche in den Eckpunkten ein, schlage nach rechts und links kleine Bögen, die sich schneiden, und erhalte so die Spitzen des siebenstrahligen Sterns, die mit den Eckpunkten des Siebenecks verbunden werden. (Je größer man die die Stecke wählt, desto länger werden die Strahlen des Sterns.)

Bonusaufgabe 2 (2,5 + 2,5 + 2,5 = 7,5 Punkte)

Können Mathematiker an den Weihnachtsmann glauben?[1]
Glauben Mathematiker an die Natürlichen Zahlen?
Dieser Vergleich weist die Richtung: Wir wollen nicht glauben, wir wollen wissen!
Wir suchen die Bedeutung des Begriffs Weihnachtsmann.
Und wo und wie suchen wir den (einen?) Weihnachtsmann?
Weil wir Mathematiker sind, wenden wir die uns zur Verfügung stehenden Methoden an.
Zunächst sichten wir Literatur, dann stellen wir Vermutungen auf, die wir voller Begeisterung auf den schmalen Rand unseres Wunschzettels kritzeln.

Gibt es denn einen (den?) Weihnachtsmann?
Das hochplausible Ergebnis der Untersuchung vorwegnehmend:

Ja, der Weihnachtsmann ist real, denn er kommt vor!

Zu dieser Überzeugung hat uns bereits eine erste - noch nicht abgeschlossene - Sichtung vorliegender mathematischer Quellen geführt. Mathematische Quellen sehen wir als besonders zuverlässig an: Mathematiker schreiben niemals Dinge, die es nicht gibt.

[1]Die vollständige Version (mit mehr Aufgaben) findet ihr unter
http://www.matheplanet.com/matheplanet/nuke/html/article.php?sid=1044

Frohe Weihnachten
WEIHNACHTSMANN (jedes Jahr zur gleichen Zeit)

[Ulm] `Der Weihnachtsmann sagt zu Knecht Ruprecht: „Wenn ich die drei Alter meiner Rentiere multipliziere, erhalte ich 2450. Addiere ich sie, erhalte ich die Höhe des Weihnachtsbaums vor meiner Hütte. Nun sage mir, wie alt die drei Rentiere sind!“ Nachdem Knecht Ruprecht die Höhe des Weihnachtsbaumes gemessen hatte, kam er zum Weihnachtsmann: „So kann ich die Aufgabe aber nicht lösen!“ Dieser stimmte zu: „Du hast Recht, ich hatte ganz vergessen zu sagen, dass mein jüngstes Rentier am liebsten Salat isst.“`
`Wie hoch ist nun der Weihnachtsbaum und wie alt sind die Rentiere?`

Wir erfahren: der Weihnachtsmann hat eine Hütte, einen Baum und drei Rentiere, er lebt oder arbeitet gemeinsam mit anderen. Er betreibt gern Denksport.
Auch die Uni Stuttgart veröffentlicht über den Weihnachtsmann:

[Stuttgart] `Der Weihnachtsmann besucht eine Straße mit genau 100 Häusern und stellt vor jede Haustür ein rotes Päckchen aus seinem prall gefüllten Gabensack. So recht zufrieden ist er damit jedoch nicht - zu gleichförmig scheinen ihm die Päckchen verteilt. Also kehrt er zum Anfang der Straße zurück, stapft erneut los und tauscht vor allen Häusern mit einer gerader Hausnummer das dort abgelegte rote Geschenk gegen ein blaues aus. Einmal in Fahrt gekommen, ist der Weihnachtsmann nicht mehr zu bremsen. Immer wieder marschiert er die Straße entlang, tauscht erst die Pakete vor jedem dritten, dann vor jedem vierten Haus aus usw. Stets wird ein rotes durch ein blaues Geschenk ersetzt und umgekehrt, bis schließlich nur das Päckchen vor Hausnummer 100 noch einmal die Farbe wechselt.`
`Vor wievielen Häusern steht nun ein rotes Päckchen - und vor welchen?`

Wir vermuten daraufhin: Der Weihnachtsmann ist ein Mathematiker. Er ist in der Lage sich intensiv und mit hohem Zeitaufwand in eine für Außenstehende nicht nachvollziehbare Aufgabe zu vertiefen. Er ist sicher kein Ingenieur, denn er plant nicht voraus, vielmehr experimentiert und verbessert er kontinuierlich. Die endgültige Aufgabenstellung formt sich erst unter seinen Händen. Er ist kritisch gegenüber eigenen Ergebnissen.

[Paderborn] `Am Weihnachtsmorgen haben wir die Bescherung. Kevin findet einen Teller randvoll (also jeweils mindestens 10 Stück) mit Mandarinen, Nüssen und Plätzchen. Da Weihnachten ist, darf seine Schwester sich insgesamt 10 Teile vom Teller nehmen. Auf wieviele Arten geht das? Dabei sei angenommen, dass Leckereien einer Sorte (z.B. Plätzchen) nicht unterscheidbar sind.`

Wir bekommen hier eine Reaktion der vom Besuch des Weihnachtsmann Betroffenen erzählt. Zu der geschilderten Zeit (Weihnachtsmorgen) war der Weihnachtsmann nicht mehr zugegen. Demnach könnte weiterhin der Weihnachtsmann ein Mathematiker sein, denn a) ist er eventuell so zurückhaltend gegenüber Frauen (weiblichen Wesen), dass diese von ihm keine Geschenke erhalten, und b) scheint sich die schon erkannte Vorliebe des Weihnachtsmanns für Denksport auf die von ihm Besuchten übertragen zu können. Wie dem auch sei, wegen der klaren Definition von „randvoll“ schätzen wir diese Quelle sehr.

Frohe Weihnachten
Weihnachtsmann (jedes Jahr zur gleichen Zeit)

Ist der Weihnachtsmann ein Langzeitstudent? Oder absolviert er ein Zweitstudium im Rentenalter? Spricht für letzteres nicht die schon mehrfach belegte Gesellschaft von Rentieren?

Schlußfolgerung / Vermutung

1) Den Weihnachtsmann gibt es, denn er kommt vor!

2) Der Weihnachtsmann ist ein älterer Student der Mathematik.

Vertiefung erforderlich!
Im Zusammenhang mit dem Weihnachtsmann gibt es genügend und viele ungelöste mathematische Fragen. Eine weitere Beschäftigung mit dem Weihnachtsmann als mathematischem Spezialgebiet erscheint aussichtsreich. Dem neuen Gebiet der Weihnachtsmänner kann eine große Zukunft erwachsen, wenn es gelingen sollte, dafür eine gesicherte, axiomatische Grundlage zu legen.
Eine offene Liste möglicher Themen zur weiteren Beschäftigung: Literaturarbeiten:

1) Kritisches Quellenverzeichnis zu und Sammlung von vorhandenen Resultaten über Weihnachtsmännern

2) Die Erdös-Zahl des Weihnachtsmannes

Reine Mathematik:

1) Über die Eindeutigkeit des Weihnachtsmannes

2) Weihnachtsmann-Charakterisierungssätze

3) Verallgemeinerte Weihnachtsmänner und äquivalente Probleme

Angewandte Mathematik:

1) Über Weihnachtsmänner und Männer an Weihnachten

2) Algorithmische Verfahren zur Lokalisierung von Weihnachtsmännern

3) Die Geschenke des Weihnachtsmannes

Wir hoffen, dass durch unsere kritische Sichtung und Bewertung sich jüngere Mathematiker für das Thema Weihnachtsmann haben interessieren lassen und in diesem noch weitgehend formbaren Gebiet ihre persönlichen Chancen erkennen können. Mit Zuversicht fordern wir zur weiteren Beschäftigung und Grundlagenforschung in diesem Gebiet auf.

Zusammenfassung Summen und Produkte
Hier ist eine Zusammenfassung über alle Summen- und Produktrechenregeln, die wir in der Vorlesung und Übung kennengelernt haben.

Seien $n, m \in \mathbb{Z}$ mit $m \leq n$ und seien $c, a_m, \ldots, a_n, b_m, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$.
Grundlegende Summenrechenregeln:

leere Summe:	$\sum_{i=n}^{m} a_i = 0$ für $m < n$	
Konstanten:	$\sum_{i=m}^{n}(c \cdot a_i) = c \cdot \sum_{i=m}^{n} a_i$	$\sum_{i=m}^{n} c = (n-m+1)c$
Assoziativgesetz:	$\sum_{i=m}^{n}(a_i + b_i) = \sum_{i=m}^{n} a_i + \sum_{i=m}^{n} b_i$	

Grundlegende Produktrechenregeln:

leeres Produkt:	$\prod_{i=n}^{m} a_i = 1$ für $m < n$	
Konstanten:	$\prod_{i=m}^{n} c = c^{n-m+1}$	$\prod_{i=m}^{n}(c \cdot a_i) = c^{n-m+1} \prod_{i=m}^{n} a_i$
Assoziativgesetz:	$\prod_{i=m}^{n}(a_i \cdot b_i) = \prod_{i=m}^{n} a_i \cdot \prod_{i=m}^{n} b_i$	
Potenzen:	$\prod_{i=m}^{n} a_i^c = (\prod_{i=m}^{n} a_i)^c$, falls a_i^c für alle $i = m, \ldots, n$ exsistiert	

Frohe Weihnachten
WEIHNACHTSMANN (jedes Jahr zur gleichen Zeit)

Universität Ulm
Britta Dorn
Michaela Eskin-Hämmerle

Übungen zum Seminar
Grundlagen der Mathematik
Blatt 9 (Bonusblatt)

Weitere Rechenregeln:

Verschieben des Index: $\sum_{i=m}^{n} a_i = \sum_{i=m+l}^{n+l} a_{i-l}$ für $l \in \mathbb{Z}$

$\prod_{i=m}^{n} a_i = \prod_{i=m+l}^{n+l} a_{i-l}$ für $l \in \mathbb{Z}$

Reihenfolge der Indizes umdrehen: $\sum_{i=m}^{n} a_i = \sum_{i=m}^{n} a_{m+n-i}$

$\prod_{i=m}^{n} a_i = \prod_{i=m}^{n} a_{m+n-i}$

Aufspalten: $\sum_{i=m}^{n} a_i = \sum_{i=m}^{k} a_i + \sum_{i=k+1}^{n} a_i \quad$ für $m \le k \le n$

$\prod_{i=m}^{n} a_i = \prod_{i=m}^{k} a_i \cdot \prod_{i=k+1}^{n} a_i \quad$ für $m \le k \le n$

Teleskopsumme: $\sum_{i=m}^{n}(a_i - a_{i+1}) = a_m - a_{n+1}$

Teleskopprodukt: $\prod_{i=m}^{n} \frac{a_i}{a_{i+1}} = \frac{a_m}{a_{n+1}} \quad$ für $a_i \neq 0$ für $i = m, \ldots, n+1$

Rechenregeln für Doppelsummen:
Seien $a_i, b_j, a_{ij} \in \mathbb{R}$ für alle $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. Dann gilt

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \qquad \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i}^{n} a_{ij} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{j} a_{ij}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_i b_j = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} b_j\right)$$

Wichtige Summen:

kleiner Gauß: $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$

geometrische Summe: $\sum_{i=0}^{n} q^i = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \quad$ für $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$

binomischer Lehrsatz: $(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n-i}$

Frohe Weihnachten
WEIHNACHTSMANN (jedes Jahr zur gleichen Zeit)