Dr. H. Lanzinger
M. Harder

Sommer 2014
06.05.2014
Blatt 2

Übungen zu Höhere Mathematik II

(Abgabe am Dienstag, den 13.05.2014, 10:00h vor H45.2)

1. Welche der folgenden Funktionen sind linear?

   (a) $f_1 \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit $f_1(\boldsymbol{x}) := \|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2}$

   (b) $f_2 \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^2$ mit $f_2(\boldsymbol{x}) := \begin{pmatrix} \min_{k=1,\dots,n} x_k \\ \max_{k=1,\dots,n} x_k \end{pmatrix}$

   (c) $f_3 \colon \mathbb{C}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $f_3 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \mathrm{Re}(x_2) \\ \mathrm{Im}(x_1) \end{pmatrix}$. Wir betrachten $\mathbb{C}^2$ hier als $\mathbb{R}$-Vektorraum.

   (d) Sei V und W jeweils ein K-Vektorraum und $f_4 \colon V \to W$ mit $f_4(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{0}$ für alle $\boldsymbol{v} \in V$.

   Dabei gilt jeweils $n \geq 2$. Begründe Deine Antworten.

   (2 + 2 + 2 + 2 Punkte)

2. (Beweis Lemma 1.7) Gegeben sind die K-Vektorräume U, V, W und $f \in L(U, V)$ sowie $g \in L(V, W)$.

   (a) Zeige, dass dann $g \circ f \in L(U, W)$ gilt.

   (b) Sei f zusätzlich bijektiv. Zeige, dass dann $f^{-1} \in L(V, U)$ gilt.

   (2 + 2 Punkte)

3. Wir betrachten die lineare Abbildung $f \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $f(\boldsymbol{x}) := (x_3, x_2, x_1)$. Dabei sei (x_1, x_2, x_3) der Koordinatenvektor von $\boldsymbol{x}$ bezüglich der kanonischen Basis $\mathbb{B} = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ mit

$$\boldsymbol{e}_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_3 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

   Zusätzlich ist die Basis $\mathbb{B}' = (\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3)$ mit

$$\boldsymbol{b}_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b}_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b}_3 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   (a) Bestimme die darstellende Matrix $M_{\mathbb{B}}^{\mathbb{B}}(f)$.

   (b) Bestimme die darstellende Matrix $M_{\mathbb{B}'}^{\mathbb{B}}(f)$

   (c) Bestimme die darstellende Matrix der Umkehrabbildung $M_{\mathbb{B}}^{\mathbb{B}'}(f^{-1})$

   (2 + 3 + 2 Punkte)

4. Wir betrachten die Abbildung $f\colon P_2 \to \mathbb{R}^3$, wobei

$$P_2 := \left\{ p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \;\middle|\; \exists\, a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R} \text{ mit } p(x) = \sum_{k=0}^{2} a_k x^k < \infty \text{ für alle } x \in \mathbb{R} \right\}$$

der $\mathbb{R}$-Vektorraum der Polynome vom Grad kleiner gleich 2 ist, und

$$f(p) := \begin{pmatrix} p(0) \\ p'(0) \\ p''(0) \end{pmatrix}$$

gilt.

(a) Zeige, dass f linear ist.

(b) Bestimme die darstellende Matrix $M_{\mathbb{B}_2}^{\mathbb{B}_1}(f)$. Dabei sei $\mathbb{B}_1$ die Basis der Monome

$$\mathbb{B}_1 := \{b_k\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid b_k(x) := x^k; k = 0, 1, 2; x \in \mathbb{R}\}$$

und $\mathbb{B}_2$ die kanonische Basis des $\mathbb{R}^3$.

(c) Zeige, dass f bijektiv ist und bestimme die darstellende Matrix der Umkehrabbildung $M_{\mathbb{B}_1}^{\mathbb{B}_2}(f^{-1})$

(2 + 2 + 2 Punkte)

Die Lösung kann in Gruppen erarbeitet, soll aber einzeln aufgeschrieben und abgegeben werden. Bitte jeweils Vorname, Nachname und SLC-Login gut lesbar auf das Blatt schreiben.