Dr. H. Lanzinger
M. Harder

Winter 2013/2014
11.12.2013
Blatt 9

Übungen zu Höhere Mathematik I

(Abgabe am Mittwoch, den 18.12.2013, 12:00h vor dem Klinikhörsaal)

1. Wir betrachten die Kurve

$$\vec{x}_S : [0, a] \to \mathbb{R}^2, \quad \vec{x}_S(t) = \begin{pmatrix} t\cos(t) \\ t\sin(t) \end{pmatrix}$$

für ein $a > 0$. Es sei $L_S(a)$ die Länge der Kurve $\vec{x}_S$ für einen gegebenen Wert $a > 0$.

(a) Skizziere die Kurve $\vec{x}_S$ für $a = 2\pi$ und $a = 4\pi$.

(b) Zeige, dass
$$\cosh\bigl(\operatorname{arsinh}(x)\bigr) = \sqrt{1 + x^2}$$
für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.

(c) Bestimme $L_S(a)$ für $a > 0$.

(d) Es sei $r > 0$. Gib eine Kurve $\vec{x}_K : [0, a] \to \mathbb{R}^2$ an, die auf dem Kreis um den Ursprung mit Radius r (gegen den Uhrzeigersinn) verläuft. Es gelte also $|\vec{x}_K(t)| = r$ für alle $t \in [0, a]$. Dabei soll der Winkel zwischen dem Vektor $\binom{1}{0}$ und $\vec{x}_K(t)$ gerade t sein (oder $t - 2k\pi$ für ein $k \in \mathbb{N}$, falls $t > 2\pi$).

(e) Es sei $L_K(a)$ die Länge der Kurve $\vec{x}_K$ für einen gegebenen Wert $a > 0$. Bestimme $L_K(a)$.

(f) Es sei $r = 2\pi$, ist dann $L_S(2\pi)$ kleiner als $L_K(2\pi)$? Wie sieht es mit $L_S(4\pi)$ und $L_K(2\pi)$ für $r = 4\pi$ aus?

(1 + 2 + 4 + 2 + 1 + 1 Punkte)

2. Gegeben ist die folgende Menge spezieller Matrizen:

$$\mathcal{M} := \left\{ A \in \mathbb{R}^{2\times 2} : \exists \varphi \in (-\pi, \pi] \text{ mit } A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \right\}.$$

Es seien $A, B \in \mathcal{M}$.

(a) Zeige, dass dann $AB = BA$ gilt.

(b) Zeige, dass $A^\top = A^{-1}$ gilt. Es darf vorausgesetzt werden, dass A invertierbar ist.

(2 + 2 Punkte)

Weitere Aufgaben befinden sich auf der nächsten Seite.

3. Bestimme die Lösungsgesamtheiten folgender linearer Gleichungssysteme.

   (a)

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + 3 &= 5x_3 \\ 7 + 8x_1 + x_2 &= 9x_3 \\ 21 + 3x_1 &= x_2 + 2x_3 \end{aligned}$$

   (b)

$$\begin{aligned} -2\alpha + \beta - \gamma &= -4 \\ 9\alpha - 7\beta - 3\gamma - 5\delta &= 3 \\ 7\alpha - 3\beta + 5\gamma + \delta &= 17 \\ -2\alpha + 5\beta + 11\gamma + 8\delta &= 20 \end{aligned}$$

   (c)

$$u + 2v - 3w + 4s = 5$$

(3 + 3 + 3 Punkte)

Je zwei Studierende sollten gemeinsam eine Lösung abgeben. Bei Abweichungen von ± 1 (Abgabe alleine oder zu dritt) wird ein Punkt abgezogen, bei größeren Abweichungen alle Punkte. Bitte jeweils Vorname, Nachname und SLC-Login gut lesbar auf das Blatt schreiben.