Prof. Dr. U. Stadtmüller
M. Weyhmüller

Sommer 2012
24.04.2012
Blatt 01

# Übungen zur Funktionalen Datenanalyse

(Zu bearbeiten bis Montag, den 30.04.2012)

1. Ein Wiener-Prozess ist eine zufällige Abbildung $W : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, mit folgenden Eigenschaften:

   - $W(0) = 0$ (fast sicher).
   - Für $0 \le s \le t$ gilt $W(t) - W(s) \sim \mathrm{N}(0, t-s)$.
   - Für $n \in \mathbb{N}$ und $0 \le t_1 \le \ldots \le t_{n+1}$ gilt: Die Zufallsvariablen $X_i := W(t_{i+1}) - W(t_i)$ sind unabhängig ($i \in \{1, \ldots, n\}$). Insbesondere sind $W(t) - W(s)$ und $W(s)$ unabhängig, für $0 \le s \le t$.
   - $W$ ist fast sicher stetig.

   (a) Zeige, dass die Kovarianzfunktion eines Wiener-Prozesses durch $\mathrm{Cov}_W(s,t) = \min\{s; t\}$ gegeben ist.

   (b) Zeige, dass $W\left(\frac{j}{m}\right) := \sum_{i=1}^{j} \frac{1}{\sqrt{m}} Y_i$ einem Wiener-Prozess an den Punkten $\frac{j}{m}$ entspricht (mit $m \in \mathbb{N}$, $0 \le j \le m$ und $Y_i \sim \mathrm{N}(0,1)$ i.i.d.).

   Bearbeite folgende Teilaufgaben mit R für $n = 200$ und $n = 2000$.

   (c) Erzeuge $n$ unanbhängige Realisierungen $W_i$ ($i \in \{1; \ldots; n\}$) eines Wiener-Prozesses, an den Stellen $\frac{j}{100}$ mit $0 \le j \le 100$ mit der Methode aus (b). Berechne $\overline{W}(t)$ und erstelle einen Plot von $\overline{W}(t)$ mit punktweisem 95%-Konfidenzintervall. Füge Plots von $W_i(t)$ für $1 \le i \le 10$ hinzu.

   (d) Berechne $\widehat{\mathrm{cov}}_W(s,t)$ mit den Realisierungen aus (c) und erstelle einen Plot der Höhenlinien von $\widehat{\mathrm{cov}}_W$ auf dem Einheitsquadrat.

   *Hinweis*: Evtl. sind die Funktionen `contour()` und `outer()` hilfreich.

   (2 + 2 + 2 + 2 Punkte)

2. Es sei $T \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Wir nennen eine Funktion $C : T \times T \to \mathbb{R}$ „positiv semidefinit“, falls für alle $n \in \mathbb{N}$ und $t_1, \ldots, t_n \in T$ die Matrix $M$ mit Einträgen

   $$m_{ij} := C(t_i, t_j) \qquad 1 \le i \le n, 1 \le j \le n$$

   positiv semidefinit ist.

   Zeige, dass die Kovarianzfunktion eines stochastischen Prozesses positiv semidefinit ist.

   (4 Punkte)