Prof. Dr. U. Stadtmüller
M. Weyhmüller

Sommer 2011
19.04.2011
Blatt 2

Angewandte Statistik für Biometrie

(Abgabe: Di., 26.04.2011, vor den Übungen)

1. Lies den, auf der Veranstaltungshomepage verfügbaren, Datensatz `data2.dat` ein. Er enthält Werte $X_1, \dots, X_n$ und $Y_1, \dots, Y_n$ eines linearen Modells $X = A\beta + \varepsilon$ mit $\varepsilon \sim \mathrm{N}(0, I_n)$ (die X_i bilden die erste Spalte des Datensatzes, die Y_i die zweite).
   (a) Passe folgende linearen Modelle an den Datensatz an:
      - $X_i = \beta_0 + \beta_1 Y_i + \varepsilon_i$
      - $X_i = \beta_0 + \beta_1 Y_i^2 + \varepsilon_i$
      - $X_i = \beta_0 + \beta_1 Y_i + \beta_2 Y_i^2 + \varepsilon_i$

   (b) Plotte die Daten, sowie die drei Regressionskurven. Welches Modell sollte verwendet werden und warum?

   Die Befehle `lm()` und `lm()$coef` könnten hilfreich sein.

(4 Punkte)

2. (a) Sei $A := \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ mit $\mathrm{Rang}(A) = \mathrm{Rang}(A_{11}) = r < n$ und $A_{11} \in R^{r \times r}$.
   Zeige: Für $A^- := \begin{pmatrix} A_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ gilt $A^- A A^- = A^-$ sowie $A A^- A = A$.

   (b) Berechne eine verallgemeinerte Inverse von $A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

(4 Punkte)

3. Bearbeite die Zusatzaufgabe von Blatt 1. Zeige also, dass die Zufallsvariablen $Y_1 := X_1 - X_2$ und $Y_2 := X_1 + X_2$ unabhängig sind und dass gilt $Y_1 \sim \mathrm{N}(0, 1)$, sowie $Y_2 \sim \mathrm{N}(0, 3)$. Dabei gelte für $X = (X_1, X_2)^\top$ dass $X \sim \mathrm{N}(0, K)$ mit $K = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$.

(4 Punkte)