3 Haushaltsoptimum, individuelle Nachfragefunktion, indirekte Nutzenfunktion und kompensierte Nachfragefunktion

Grundannahme der Haushaltstheorie:

HH kauft ein solches Güterbündel $x^* = (x_1^*, \ldots, x_i^*, \ldots, x_n^*)$, das er

a) sich leisten kann

b) seinen Nutzen maximiert.

Ein solches Güterbündel x* heißt **Haushaltsoptimum**.

Beim Preis $p_i \geq 0$ (i=1,...,n) für Gut i und mit dem Budget B > 0 kann sich der HH alle solchen Güterbündel $x = (x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}_+^n$ kaufen, die der **Budgetrestriktion**

$$p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i \leq B \qquad (3.1)$$

genügen.

Budgetrestriktion im Fall n = 2:

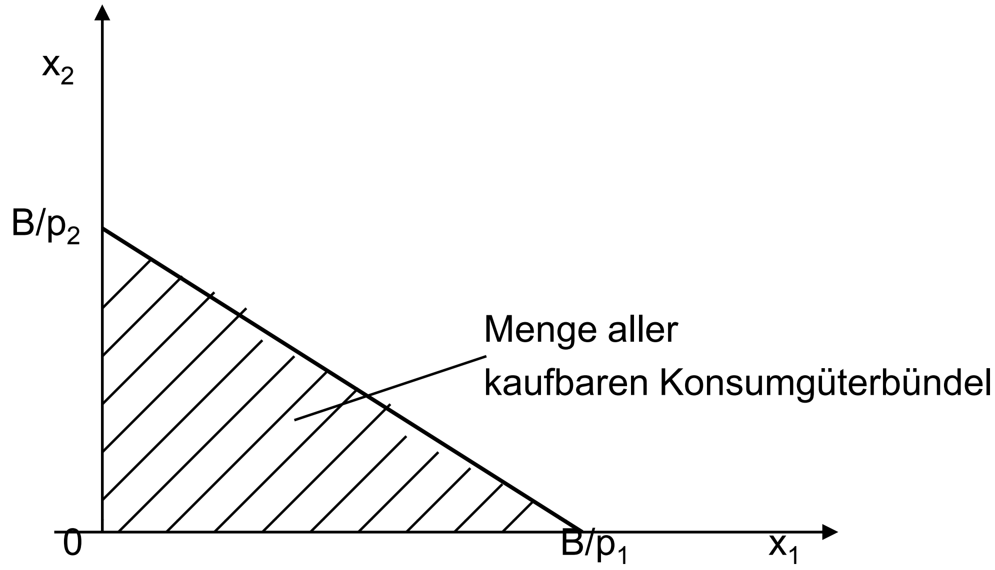
$$p_1 x_1 + p_2 x_2 \leq B \Leftrightarrow x_2 \leq -\frac{p_1}{p_2} x_1 + \frac{B}{p_2}$$

$\Rightarrow$ Menge aller Punktepaare **auf und unterhalb der Budgetgeraden**

$$x_2 = -\frac{p_1}{p_2} x_1 + \frac{B}{p_2} \qquad (3.1')$$

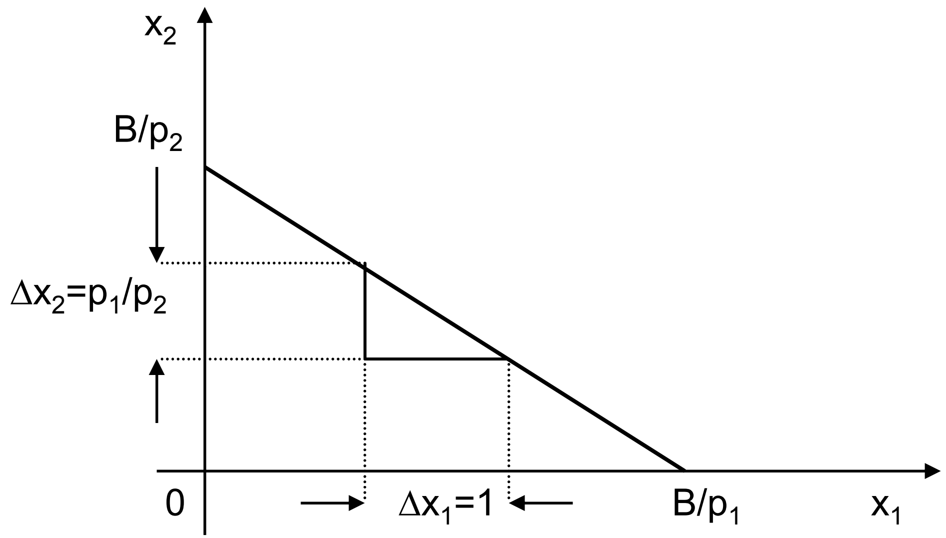
⇒ Gerade mit der Steigung $-p_1/p_2$

Grafisch:



Anschauliche Bedeutung der Steigung der Budgetgeraden:

Sie gibt an, **auf wie viele Einheiten vom Gut 2 der HH verzichten muss, wenn er eine Einheit von Gut 1 mehr konsumieren** will, **ohne sein Budget zu überschreiten**:



⇒ ***Opportunitätskosten* für eine Einheit von Gut 1, ausgedrückt in Einheiten von Gut 2**

= *Wert des Verzichts* von einer Einheit von Gut 1 in Einheiten von Gut 2

Opportunitätskosten geben den Wert eines (potenziellen) Verzichts an.

HH-Optimum x* ist Lösung des Optimierungsproblems

$$u(x_1,...,x_n) \to \max.$$

unter der Nebenbedingung (P1‘)

$$\sum_{i=1}^{n} p_i x_i \leq B$$

1. Beobachtung:

Falls der HH eine **streng monotone Nutzenfunktion** hat, wird er im Optimum auch sein **gesamtes Budget verbrauchen**.

$\Rightarrow$ **(P1') ist bei streng monotoner NF äquivalent** zu

$$u(x_1,\ldots,x_n) \rightarrow \max.$$

unter der Nebenbedingung (P1)

$$\sum_{i=1}^{n} p_i x_i = B$$

Lösung(en) x* von (P1) im allgemeinen Fall (bei part. Differenzierbarkeit von u) **mit dem Lagrange-Ansatz**:

Bildung der zugehörigen **Lagrange-Funktion**:

$$L(x_1,...,x_i,...,x_n,\lambda) := u(x_1,...,x_i,...,x_n) - \lambda(\sum_{j=1}^{n} p_j x_j - B)$$

Notwendige Bedingung für ein Optimum x*:

***alle* partiellen Ableitungen der Lagrange-Funktion sind gleich 0:**

$$0 = \frac{\partial L(x_1^*,...,x_n^*,\lambda^*)}{\partial x_i} = \frac{\partial u(x_1^*,...,x_n^*)}{\partial x_i} - \lambda^* p_i \text{ (für } i = 1,...,n)$$

$$0 = \frac{\partial L(x_1^*,...,x_n^*,\lambda^*)}{\partial \lambda} = \sum_{j=1}^{n} p_j x_j^* - B \tag{3.2'}$$

oder

$$\frac{\partial u(x_1^*,\dots,x_n^*)}{\partial x_i} = \lambda^* p_i \quad (\text{für } i = 1,\dots,n)$$
$$\sum_{j=1}^{n} p_j x_j^* = B \qquad (3.2)$$

Division der i-ten durch die k-te Gleichung liefert (bei $\lambda^* \neq 0$):

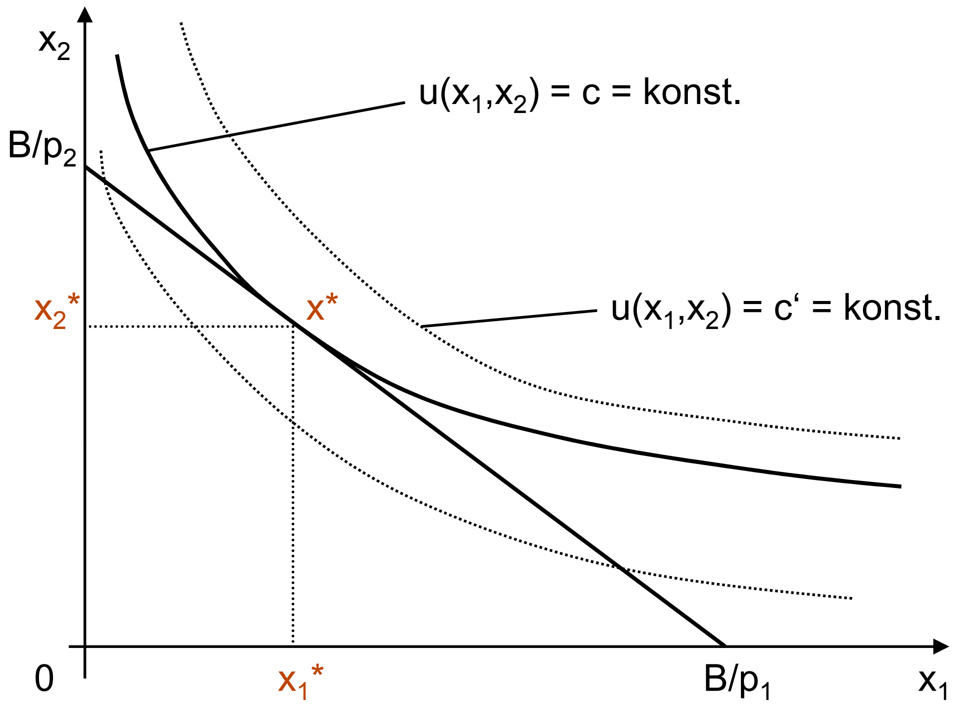
$$\frac{\dfrac{\partial u(x_1^*,\dots,x_n^*)}{\partial x_i}}{\dfrac{\partial u(x_1^*,\dots,x_n^*)}{\partial x_k}} = MRS_{i;k}(x^*) = \frac{p_i}{p_k} \qquad (3.3)$$

$\Rightarrow$

2. Gossensches Gesetz: Im HH-Optimum ist (bei konkaven NF u) die $MRS_{i;k}$ gleich dem Preisverhältnis p_i/p_k .

Anschauliche Bedeutung des 2. Gossenschen Gesetzes für n = 2:

Im HH-Optimum ist die Steigung der Isonutzenlinie (und das ist die MRS) gerade gleich der Steigung der Budgetgeraden:



Absolutbetrag der Steigung der Budgetgeraden sind die Opportunitätskosten für eine Einheit von Gut 1 (gegenüber Gut 2);

die **MRS ist die Zahlungsbereitschaft des HH** für eine Einheit von Gut 1 (in Einheiten für Gut 2).

$\Rightarrow$ Andere Formulierung des 2. Gossenschen Gesetzes:

Im HH-Optimum stimmen (bei *konkaver NF*, und damit bei *konvexen Präferenzen*) die Opportunitätskosten und die Zahlungsbereitschaft des HH für Gut 1 (gegenüber Gut 2) überein.

Entsprechendes gilt bei n Gütern zwischen je zweien.

Beispielrechnung für $u(x_1, x_2, x_3) = x_1^{\alpha} x_2^{\beta} x_3^{\gamma}$ mit $0 < \alpha, \beta, \gamma < 1$

(sogenannte **Cobb-Douglas-Nutzenfunktion**)

Ergebnisse:

$$x_1^* = \frac{\alpha}{\alpha+\beta+\gamma}\frac{B}{p_1}$$

$$x_2^* = \frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}\frac{B}{p_2}$$

$$x_3^* = \frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\frac{B}{p_3}$$

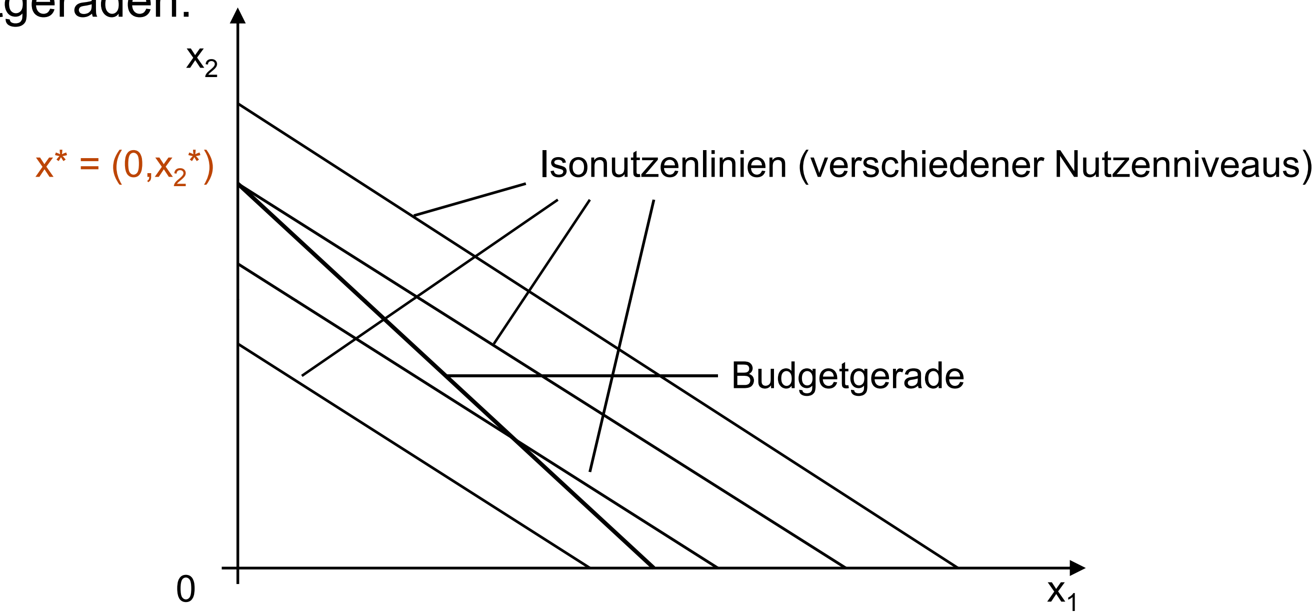
$\Rightarrow$ Optimale nachgefragte Mengen sind (nur) abhängig von den Preisen der jeweiligen Güter und der Höhe des Budgets.

Bei **linearen** und **konvexen Nutzenfunktionen:**

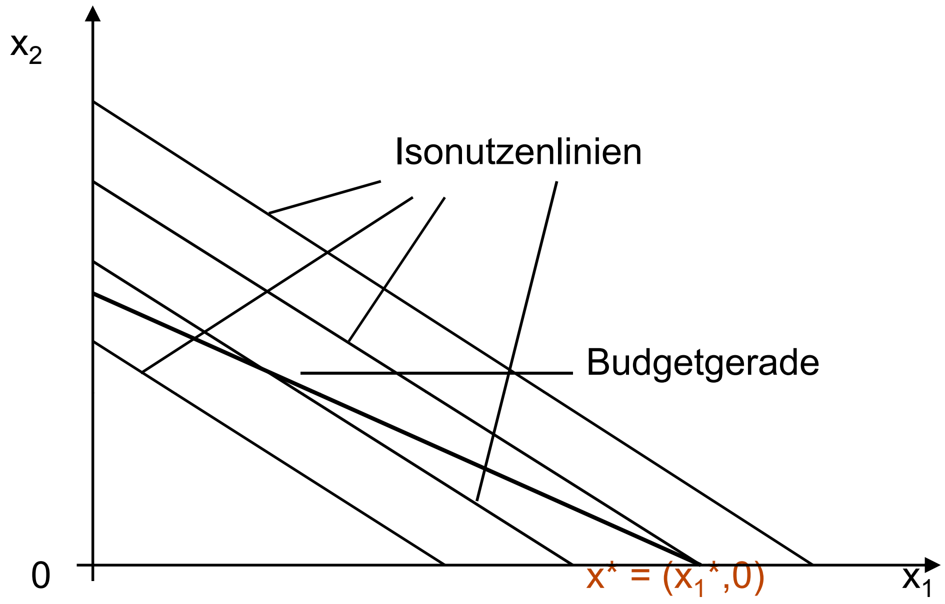
HH-Optimum ist eine **Randlösung von (P1)**:

Bei linearer NF für den Fall n = 2:

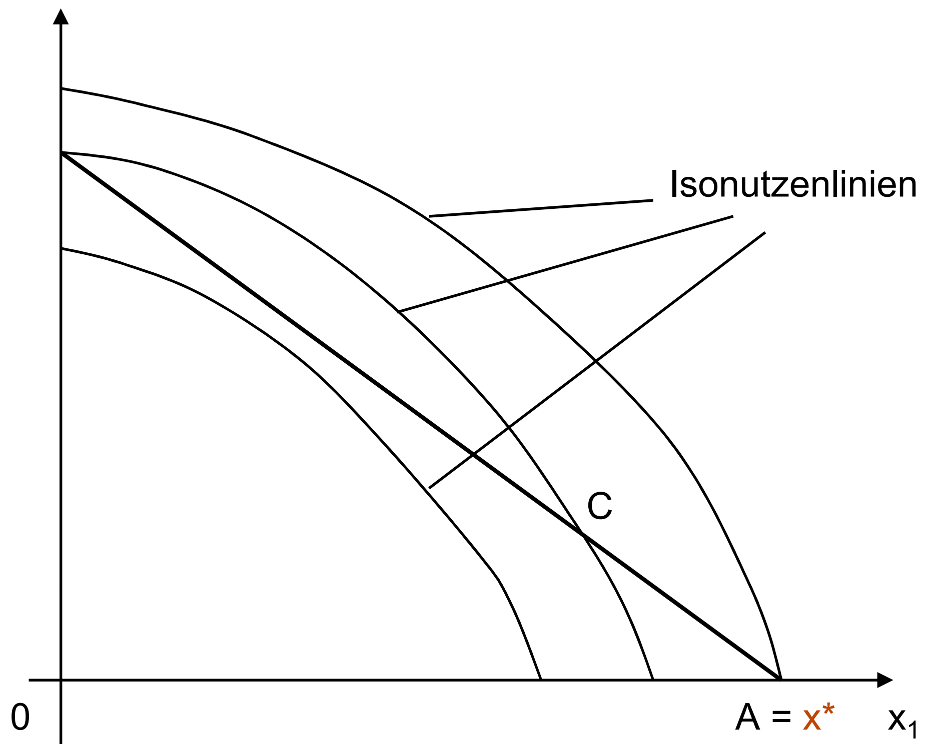
a) Steigung der Isonutzenlinien ist (absolut) **kleiner** als Steigung der Budgetgeraden:



b) Steigung der Isonutzenlinien ist (absolut) **größer** als Steigung der Budgetgeraden:



c) Bei **konvexen** Nutzenfunktionen, d.h. konkaven Präferenzen:



Allgemein gilt:

Die Lösungen x_i* (für i=1,...,n) **von (P1)** hängen von

- den Preisen p_k
- dem Budget B und
- der Gestalt der NF (und damit von der Präferenz) ab.

Sie sind **Funktionen n_i des Budgets B und der Preise p_k** (i,k=1,...,n).

D.h. es ist für i = 1,...,n

$$x_i^* = n_i(p_1,\dots,p_i,\dots,p_n,B) \qquad (3.4)$$

Die Funktionen n_i (als Lösungen des Optimierungsproblems (P1)) sind die ***individuellen Nachfragefunktionen des betreffenden HH***.

Beispiel: Für die NF $u(x_1, x_2, x_3) = x_1^{\alpha} x_2^{\beta} x_3^{\gamma}$ von oben war

$$x_1^* = \frac{\alpha}{\alpha+\beta+\gamma}\frac{B}{p_1}, x_2^* = \frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}\frac{B}{p_2}, x_3^* = \frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\frac{B}{p_3}$$

Also sind in diesem Beispiel

$$x_1^* = n_1(p_1, p_2, B) := \frac{\alpha}{\alpha+\beta+\gamma}\frac{B}{p_1}$$

$$x_2^* = n_2(p_1, p_2, B) := \frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}\frac{B}{p_2}$$

$$x_3^* = n_3(p_1, p_2, B) := \frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\frac{B}{p_3}$$

die individuellen Nachfragefunktionen des HH.

In *diesem* Fall:

(i) **Nachfrage nach Gut i hängt nur vom Budget B und dem Preis p_i *desselben* Gutes i ab**, nicht aber von den Preisen anderer Güter.

(ii) **Die Nachfrage nach jedem Gut *steigt mit wachsendem Budget (⇒ superiores Gut)***, und die **Nachfrage nach jedem Gut *fällt mit wachsendem Preis* dieses Gutes (*⇒ normales Gut)***.

Im Allgemeinen wird die Nachfragemenge eines Gutes aber auch von den **Preisen *anderer* Güter** abhängen (z.B. wenn diese Güter substitutiv oder komplementär zueinander sind).

Einsetzen der optimalen Gütermengen x_i^* = $x_i^* = n_i(p_1,\dots,p_n,B)$ in **die NF u** liefert den ***maximalen*** **Nutzen u***, den ein HH **bei den Preisen** $p_1,p_2,\dots,p_n$ **und dem Budget B** erreichen kann:

$$u^* = u(n_1(p_1,\dots,p_n,B),\dots,n_n(p_1,\dots,p_n,B)) =: V(p_1,\dots,p_n,B) \qquad (3.5)$$

Die Funktion V heißt ***indirekte Nutzenfunktion*** (des betreffenden HH).

Sie **gibt den bei den Preisen** $p_1,p_2,\dots,p_n$ **und dem Budget B *jeweils maximal erreichbaren*** **Nutzen eines HH an**.

Die indirekte NF V eines HH hängt also von den Preisen und dem Budget des HH ab (anders als die ursprüngliche (= direkte) NF des HH).

Beispiel:

Für die schon oben verwendete Cobb-Douglas-NF $u(x_1, x_2, x_3) = x_1{}^{\alpha} x_2{}^{\beta} x_3{}^{\gamma}$

erhält man durch Einsetzen der Optimalwerte x_1*, x_2* und x_3* :

$$V(p_1, p_2, p_3, B) = (x_1{}^*)^{\alpha} (x_2{}^*)^{\beta} (x_3{}^*)^{\gamma} =$$

$$\left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta+\gamma} \frac{B}{p_1} \right)^{\alpha} \cdot \left(\frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma} \frac{B}{p_2} \right)^{\beta} \cdot \left(\frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma} \frac{B}{p_3} \right)^{\gamma} =$$

$$\left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta+\gamma} \right)^{\alpha} \cdot \left(\frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma} \right)^{\beta} \cdot \left(\frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma} \right)^{\gamma} \cdot B^{\alpha+\beta+\gamma} (p_1)^{-\alpha} (p_2)^{-\beta} (p_3)^{-\gamma}$$

Bedeutung des Lagrange-Parameters λ^* in der Lösung (3.2) bzw. den Optimalbedingungen des HH-Optimums:

Man kann zeigen (Beweis im Skript):

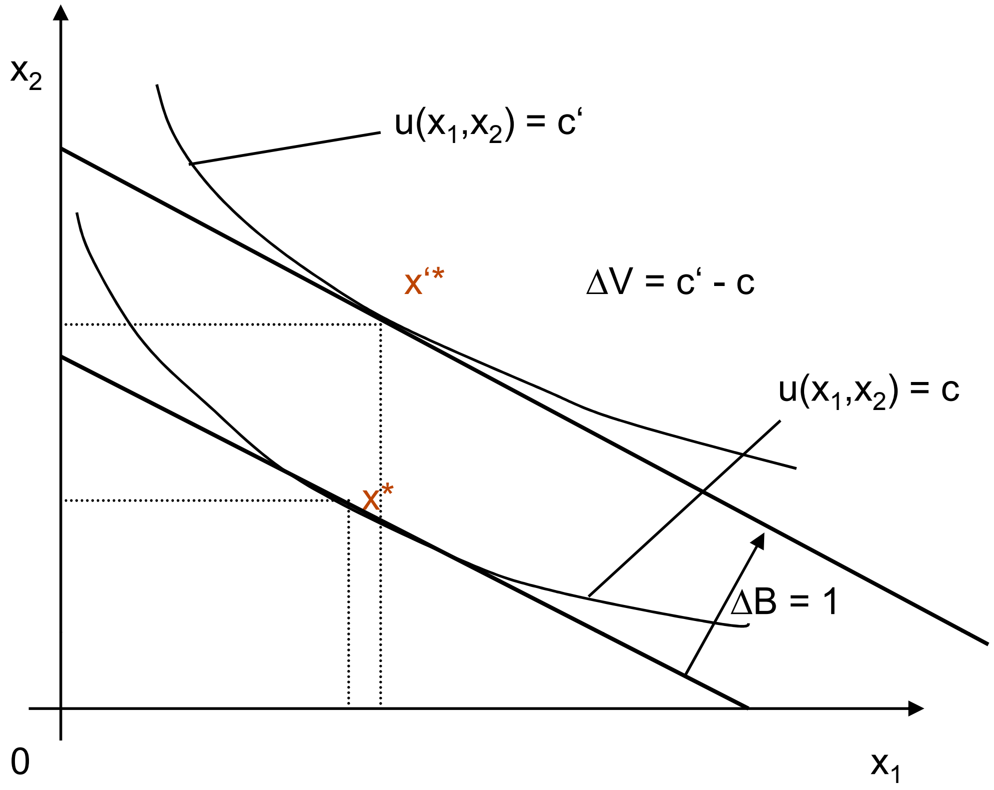
$$\frac{\partial V}{\partial B} = \lambda^* \qquad (3.9)$$

D.h.: Der Lagrange-Parameter λ^* gibt die Ableitung der indirekten Nutzenfunktion (an der Optimalstelle) an.

D.h.: **Der Lagrange-Parameter gibt (ungefähr) an, um wie viel Einheiten sich der maximal erreichbare Nutzen des HH erhöht, wenn das Budget um eine Einheit erhöht wird.**

Beachte: Erhöhung des Budgets (c.p.) bedeutet Verschiebung der Budgetgeraden (bei konstanter Steigung).

Grafisch:



Lösung x* des Optimierungsproblems (P1) entspricht der **ersten Version des sogenannten Rationalitätsprinzips**:

Der HH versucht, mit seinem Budget einen möglichst großen Nutzen zu erreichen.

(Ergebnis: die individuellen Nachfragefunktionen n_i des HH)

Sicht der **zweiten Version des Rationalitätsprinzips:**
ein bestimmtes Ziel mit möglichst niedrigem Aufwand erreichen.

In der Fragestellung der Haushaltstheorie:

Welches Konsumgüterbündel x** sichert dem HH ein **bestimmtes Nutzenniveau** $\bar{u}$ und **minimiert gleichzeitig die damit verbundenen Ausgaben** des HH?

Formal übersetzt:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i x_i \to \min.$$

unter der Nebenbedingung (P2)

$$u(x_1,\ldots,x_n) = \bar{u} = \text{konst.}$$

Lösungen $x^{**} = (x_1^{**},\ldots,x_n^{**})$ von (P2) wieder mit Lagrange-Ansatz ermittelbar.

Sie sind ihrerseits nun Funktionen n_i^{komp} der Werte $p_1,\ldots, p_n$ und $\bar{u}$:

$$x_i^{**} = n_i^{komp}(p_1,\ldots,p_n,\bar{u}) \qquad (3.10)$$

$\Rightarrow$ ***kompensierte* (oder Hickssche) *Nachfragefunktionen***

Die kompensierte Nachfragefunktion eines HH gibt an, wie ein HH eine **Preiserhöhung mit einer Veränderung seiner Nachfragemengen** (und damit auch seiner Konsumausgaben) **kompensieren muss, um sein Nutzenniveau (auf $\bar{u}$) halten zu können**.

Die jeweils ***minimale Ausgabe zum Erreichen des Nutzenniveaus*** $\bar{u}$ **bei den Preisen p_1 ,...,p_n** :

wieder eine Funktion e dieser Parameter: **Ausgabenfunktion des HH:**

$$e(p_1,\ldots,p_n,\bar{u}) := \underbrace{\min}_{\substack{x_1,\ldots,x_n \\ \text{mit } u(x_1,\ldots,x_n)=\bar{u}}} \left(\sum_{i=1}^{n} p_i x_i \right)$$

Beispiel für die Berechnung der kompensierten Nachfragefunktionen und der Ausgabenfunktion für die spezielle NF:

$$u(x_1, x_2) = x_1^{\alpha} x_2^{1-\alpha} \qquad \text{mit } 0 < \alpha < 1$$

1. Berechnung der kompensierten Nachfragefunktionen:

Zu lösen das Minimierungsproblem:

$$f(x_1, x_2) = p_1 x_1 + p_2 x_2 \rightarrow \min.$$

$$\text{unter der Nebenbedingung}$$

$$x_1^{\alpha} x_2^{1-\alpha} = \bar{u}$$

Aus Nebenbedingung $x_1^{\alpha} x_2^{1-\alpha} = \bar{u}$:

$$x_2 = \bar{u}\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{\alpha} \qquad (+)$$

Zugehörige Lagrange-Funktion (es geht hier auch einfacher):

$$L(x_1, x_2, \lambda) = p_1 x_1 + p_2 x_2 - \lambda(x_1^{\alpha} x_2^{1-\alpha} - \bar{u})$$

Notwendige Bedingungen:

$$0 = \frac{\partial L}{\partial x_1} = p_1 - \lambda \alpha x_1^{\alpha-1} x_2^{1-\alpha} \quad \text{und} \quad 0 = \frac{\partial L}{\partial x_2} = p_2 - \lambda(1-\alpha) x_1^{\alpha} x_2^{-\alpha}$$

bzw.

$$p_1 = \lambda \alpha x_1^{\alpha-1} x_2^{1-\alpha} \quad \text{und} \quad p_2 = \lambda(1-\alpha) x_1^{\alpha} x_2^{-\alpha}$$

Division liefert (2. Gossensches Gesetz!):

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{\lambda \alpha x_1^{\alpha-1} x_2^{1-\alpha}}{\lambda(1-\alpha) x_1^{\alpha} x_2^{-\alpha}} = \frac{\alpha}{1-\alpha} \frac{x_2}{x_1}$$

und damit unter Verwendung von (+):

$$\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\alpha} = \left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^{\alpha} \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{\alpha} = \left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^{\alpha} \frac{1}{\bar{u}} x_2$$

Aufgelöst nach x_2:

$$x_2^{**} = \left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)^{\alpha} \cdot \bar{u} \cdot \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\alpha} =: n_2^{komp}(p_1, p_2, \bar{u})$$

Analog ergibt sich:

$$x_1^{**} = \left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^{1-\alpha} \cdot \bar{u} \cdot \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{1-\alpha} =: n_1^{komp}(p_1, p_2, \bar{u})$$

2. Berechnung der Ausgabenfunktion des HH für dieses Beispiel:

$$e(p_1, p_2, \bar{u}) = p_1 x_1^{**} + p_2 x_2^{**} =$$

$$= p_1 \left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^{1-\alpha} \cdot \bar{u} \cdot \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{1-\alpha} + p_2 \left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)^{\alpha} \cdot \bar{u} \cdot \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\alpha} =$$

$$= \bar{u} \cdot (p_1^{\alpha} p_2^{1-\alpha} \alpha^{1-\alpha} (1-\alpha)^{\alpha-1} + p_2^{1-\alpha} p_1^{\alpha} (1-\alpha)^{\alpha} \alpha^{-\alpha}) =$$

$$= \bar{u} \cdot \left(\frac{p_1}{\alpha}\right)^{\alpha} \left(\frac{p_2}{1-\alpha}\right)^{1-\alpha}$$

Bisherige Blickrichtung:

Von den Präferenzen/Nutzen **wurde auf das HH-Optimum und damit *auf das Nachfrageverhalten* des HH geschlossen.**

- konkrete Form der Nutzenfunktion wurde als gegeben unterstellt;
- keine Information, wie die NF eines HH (empirisch) bestimmt werden kann.

Neue Blickrichtung:

Von empirisch beobachtetem Kaufverhalten soll auf die Präferenzen des Konsumenten geschlossen werden.

Vorstellung: Das **Kaufverhalten *offenbart* die Präferenzen des HH**:

$\Rightarrow$ ***Theorie der offenbarten Präferenzen*** (revealed preference theory)

Grundbaustein dieser Theorie:

Annahme des **„Schwachen Axioms der Theorie der offenbarten Präferenzen“:**

Wählt ein HH in einer Situation, in der er alternativ sowohl x wie auch y auswählen (d.h. kaufen) kann, tatsächlich x aus, so zeigt er, dass er x mindestens so hoch wie y schätzt.

Analyse von Kaufsituationen, aus denen mit Hilfe des Schwachen Axioms **interessante Schlüsse** gezogen werden können.

Voraussetzungen dabei:

- HH hat **monotone** (aber ansonsten unbekannte) **Präferenz.**

- Die Präferenz des HH ist **transitiv**.

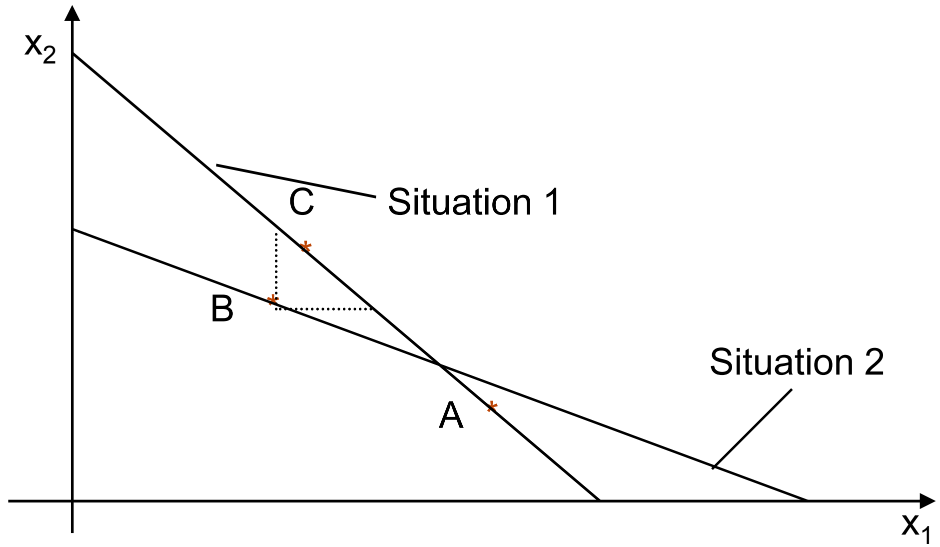
Zwei Situationen:

1. Preis- und Budget-Situation: *steile* Budgetgerade

HH hat **A gekauft.**

2. Preis- und Budgetsituation: *flachere* Budgetgerade

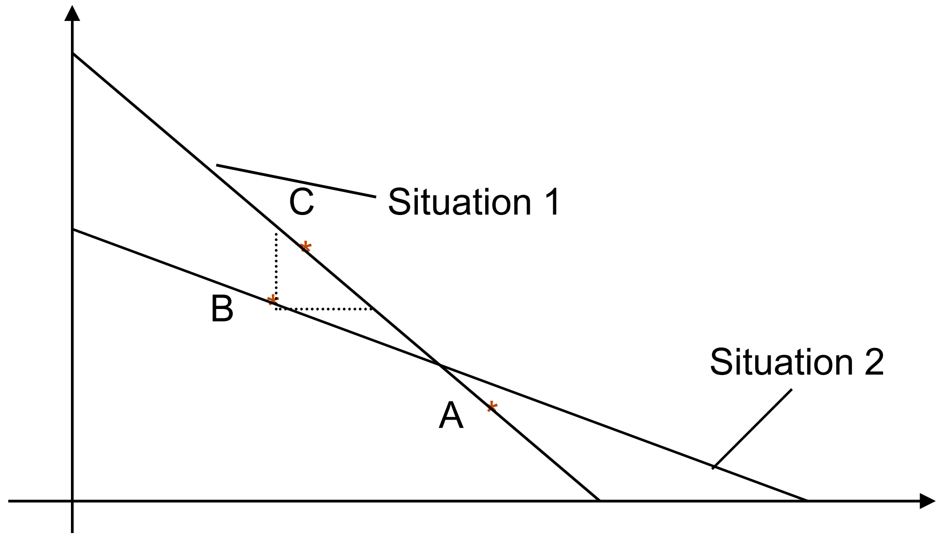
HH hat **B gekauft**.



In der 1. Situation wurde A gekauft;

B wäre aber auch kaufbar gewesen (B liegt unterhalb der Budget-geraden der 1. Situation):

⇒ (Schwaches Axiom): **A wird mindestens so hoch wie B geschätzt.**



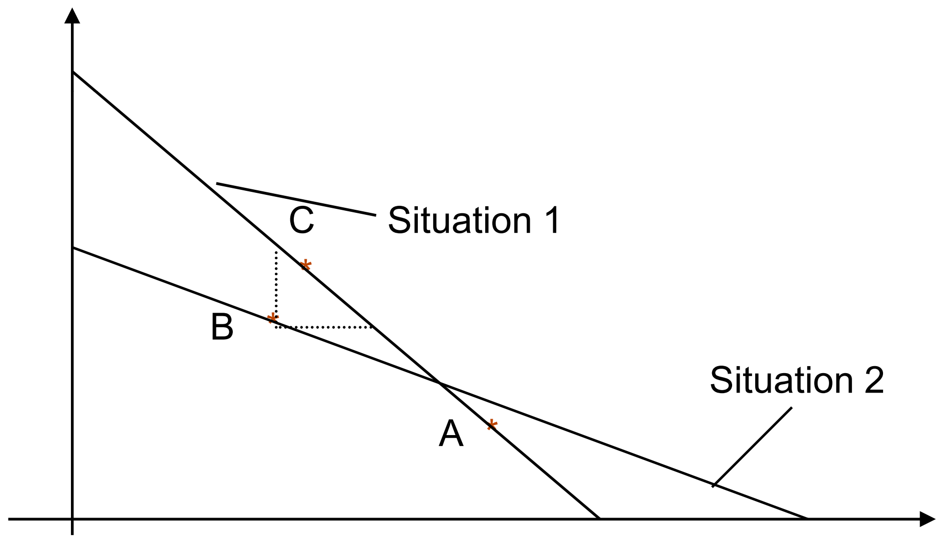
Ferner:
C ist in beiden Komponenten größer als B

⇒ (Monotonie): **C wird echt höher als B geschätzt.**

C wäre in der 1. Situation auch kaufbar gewesen; es wurde aber A gekauft.

⇒ (Schwaches Axiom): **A wird mindestens so hoch wie C geschätzt.**

⇒ (Transitivität): **A wird echt höher als B geschätzt.**



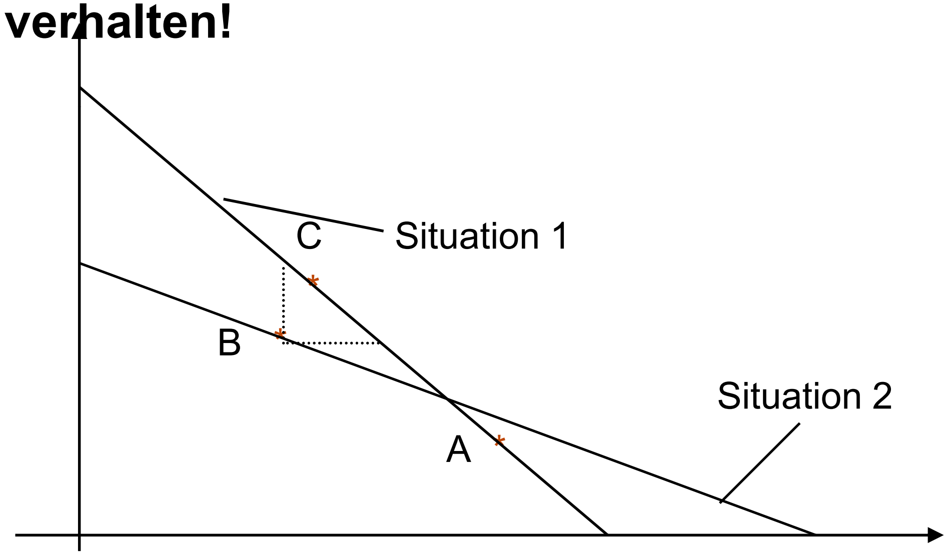
Aber:

Derselbe HH hat in der 2. Situation B gewählt. Hier wäre A aber ebenfalls wählbar gewesen (A liegt unterhalb der Budgetgeraden der 2. Situation).

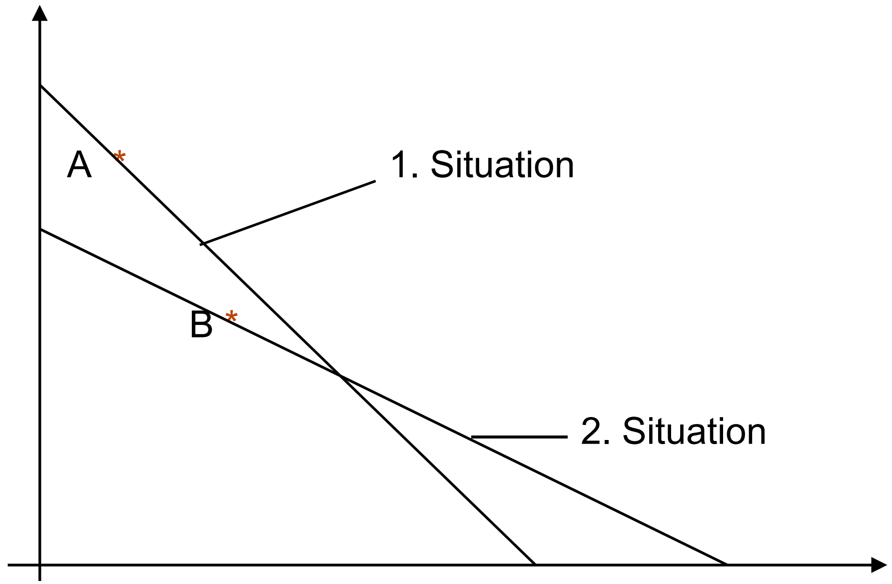
⇒ (Schwaches Axiom): **B wird mindestens so hoch wie A geschätzt.**

Das ist aber inkompatibel mit dem vorigen Ergebnis, dass der HH A echt höher als B schätzt.

⇒ **In mindestens einer der beiden Situationen hat sich der HH nicht nutzenmaximal verhalten!**



Anders stellt sich die Situation dar, wenn das in der 1. Situation ausgewählte Güterbündel A wie in der folgenden Grafik liegt:



⇒ (Schwaches Axiom): **A wird mindestens so hoch wie B geschätzt**.

In der 2. Situation ist aber A nicht wählbar.

⇒ **Wahl von B in der 2. Situation kein Widerspruch zur Wahl von A in der 1. Situation!**

Drei Aspekte in diesem Kapitel grundsätzlich nicht berücksichtigt:

(i) Nutzen eines HH hängt nicht nur von Konsumgütern ab; z.B. auch von **Freizeit** und **nicht ökonomischen Gütern/Aspekten**.

(ii) Ein HH gibt nicht unbedingt sein gesamtes Budget für Konsumgüter aus, sondern bildet **Ersparnisse**.

$\Rightarrow$ Nutzen (auch in der Zukunft) durch Zinsen und spätere Verwendung des Ersparten

$\Rightarrow$ **Dynamische Betrachtung (Mehr-Perioden-Modelle) nötig**.

(iii) Nutzen, Budget und Preise können **unsicher** sein.

$\Rightarrow$ Berücksichtigung von Erwartungen, Risiko etc. nötig