

# **Stochastische Analyse von Absicherungsstrategien mit und ohne Garantie**

**Zusammenfassung der Masterarbeit an der Universität Ulm**

Julika Klingenstein

## **Motivation**

In der heutigen Zeit ist die Absicherung gegen finanzielle Risiken von großer Bedeutung, insbesondere im Bereich der Altersvorsorge und Vermögensbildung. Versicherungsprodukte, die an Aktienfonds gebunden sind, bieten eine vielversprechende Möglichkeit, durch Kapitalmarktinvestitionen langfristig Vermögen aufzubauen. Diese fondsgebundenen Versicherungsprodukte sind jedoch auch den Schwankungen der Finanzmärkte ausgesetzt, was potenziell zu erheblichen Verlusten führen kann. Daher gewinnen Absicherungsstrategien, die solche Verluste minimieren sollen, immer mehr an Relevanz.

Diese Masterarbeit widmet sich der stochastischen Analyse verschiedener Absicherungsstrategien für fondsgebundene Versicherungsprodukte, sowohl mit als auch ohne Garantien. Ziel der Arbeit ist es, die Wirksamkeit und Effizienz dieser Strategien unter unterschiedlichen Marktbedingungen zu untersuchen und zu bewerten, welche Ansätze den besten Schutz bieten.

## **Modellbeschreibung**

Das zugrunde liegende Kapitalmarktmodell basiert auf dem Black-Scholes-Modell mit einem Aktienfonds und einem risikolosen Geldmarktkonto. Der Aktienfonds folgt einer geometrischen Brown'schen Bewegung mit konstanter Drift und Volatilität.

In dieser Arbeit werden verschiedene Modifikationen eines fondsgebundenen Rentenversicherungsproduktes untersucht. Das Produkt wird gegen eine Einmalzahlung angeboten. Diese setzt sich aus einer Prämie ( $P$ ), die in den Aktienfonds investiert wird und einer Sicherheitsprämie ( $SP$ ), welche in ein Hedge-Portfolio fließt, zusammen. Die Höhe der

Sicherheitsprämie ergibt sich aus der Formel für den fair Value einer Put-Option aus dem Black-Scholes-Modell. Zur Absicherung wird monatliches Delta-Hedging angewandt.

Ziel des Hedging ist es, eine at-the-money Put-Option, welche den Aktienfonds als Basiswert hat, zu simulieren, um eine Mindestablaufleistung für den Kunden zu gewährleisten. Das Delta der Put-Option wird monatlich berechnet, um die notwendige Anpassung des Hedge-Portfolios zu bestimmen. Ein Teil des Hedge-Portfolios wird entsprechend dem berechneten Delta in den Aktienfonds investiert, der Rest wird risikolos zum festgelegten Zinssatz angelegt. Am Ende jeden Monats wird der Wert des Hedge-Portfolios neu berechnet, basierend auf der Performance der Put-Option. Dieser Prozess wird monatlich wiederholt, um das Portfolio kontinuierlich an die Marktbewegungen anzupassen. Der Hedge-Fehler wird als Differenz zwischen dem Wert der Put-Option und dem Wert des Hedge-Portfolios definiert. Ziel ist es, den Hedge-Fehler zu minimieren und somit eine möglichst genaue Absicherung der Garantie zu erreichen. Diese Methode ermöglicht eine dynamische Anpassung des Portfolios an Marktveränderungen und zielt darauf ab, dem Kunden am Ende der Laufzeit mindestens die eingezahlte Prämie  $P$  zurückzuerstatten. Es ist jedoch wichtig zu beachten, dass aufgrund der diskreten Anpassungsintervalle kein perfektes Hedging möglich ist, was zu Abweichungen zwischen dem tatsächlichen Portfoliowert und dem theoretischen Wert der Put-Option führen kann. Demnach sprechen wir bei dieser Absicherungsform von einer „Quasi-Garantie“, d.h. die Prämie  $P$  kann in den meisten Fällen zurückgezahlt werden, allerdings bleibt eine geringe Wahrscheinlichkeit, die angestrebte Summe nicht zu erreichen.

Daher werden in der Masterarbeit Modifikationen des Produktes betrachtet, die durch zusätzliche Absicherungen, entweder eine Garantie gewährleisten können oder die Wahrscheinlichkeit für einen Shortfall weiter verringern. Unter anderem werden Produkte betrachtet, bei denen für die Berechnung der Sicherheitsprämie als Vorsichtsannahme von einer höheren Volatilität des Aktienfonds ausgegangen wird. Des Weiteren werden Produkte untersucht, welche lediglich eine Leistung im Erlebensfall garantieren sowie Produkte, bei denen zusätzlich Stornowahrscheinlichkeiten berücksichtigt werden. Außerdem analysieren wir eine Produktmodifikation, bei der eine in-the-money Put-Option durch Delta-Hedging simuliert wird.

Bei dieser Strategie entspricht die Höhe der Quasi-Garantie der insgesamt gezahlten Prämie (Prämie  $P$  + Sicherheitsprämie  $SP$ ).

## **Analyse**

Im Hauptteil werden die Strategien sowohl mittels einer Szenario- als auch einer stochastischen Analyse verglichen.

Bei der Szenarioanalyse wird die Performance der verschiedenen Hedging-Strategien unter unterschiedlichen Marktbedingungen untersucht. Es werden neben negativen Szenarien, bei denen die Aktienmärkte stark fallen, auch positive Szenarien, bei denen die Aktienmärkte stark steigen, analysiert. Diese Szenarioanalysen helfen, die Robustheit und Wirksamkeit der Strategien unter extremen Marktbedingungen zu bewerten.

Der zentrale Teil der Ergebnisse ist die quantitative Analyse, bei der auf Basis von 10.000 Realisationen unterschiedliche Untersuchungen durchgeführt werden. Zunächst wird der Hedgingfehler analysiert, um zu bewerten, wie zuverlässig die verschiedenen Strategien die angestrebten Absicherungsziele erreichen. Hierbei wird untersucht, wie groß die Abweichungen zwischen den tatsächlichen und den theoretisch erwarteten Ergebnissen sind. Ein weiterer wichtiger Aspekt der quantitativen Analyse ist die Untersuchung der Renditeverteilungen, insbesondere in Hinblick auf den Erwartungswert und die Standardabweichung, der verschiedenen Strategien.

Zusätzlich wird die Verteilung der Verluste für Produkte ohne Garantie, bzw. mit Quasi-Garantie analysiert. Diese Untersuchung gibt Aufschluss darüber, wie risikoreich die verschiedenen Strategien im Fall von Marktverlusten sind. Abschließend erfolgt eine zusammenfassende Analyse und ein Vergleich der Strategien aus Kundensicht. Dabei werden die Ergebnisse der vorherigen Analysen zusammengeführt, um eine umfassende Bewertung der Hedging-Strategien hinsichtlich ihrer Effektivität und Effizienz unter verschiedenen Marktbedingungen und aus der Perspektive der Kunden zu ermöglichen.

Ergänzend zu den Hauptanalysen wurden auch Zusatzanalysen durchgeführt. Eine dieser Zusatzanalysen befasst sich mit den Hedgingfehlern bei jährlichen Hedge-Perioden. Hier wird untersucht, wie sich der

Hedgingfehler verändert, wenn das Hedge-Portfolio nicht monatlich, sondern jährlich angepasst wird. Die Ergebnisse zeigen, dass jährliche Anpassungen zu einer größeren Streuung der Hedgingfehler und einem höheren Shortfall-Risiko führen.

Eine weitere Zusatzanalyse untersucht den Einfluss unterschiedlicher Volatilitäten auf das Delta-Hedging. Hierbei wird analysiert, wie sich die Verwendung einer von der tatsächlichen Volatilität abweichenden Volatilität auf die Hedging-Performance auswirkt. Die Ergebnisse zeigen, dass Abweichungen von der tatsächlichen Volatilität zu einer signifikanten Streuung der Hedgingfehler führen. Außerdem lassen sich eindeutige Tendenzen erkennen. Eine zu geringe Volatilität führt tendenziell zu einem Unterschreiten des tatsächlichen Wertes der Put-Option, während eine zu hohe Volatilität eher zu Übersicherung führt. Diese Erkenntnisse unterstreichen die Bedeutung einer möglichst genauen Schätzung der Volatilität für ein effektives Delta-Hedging.

## **Fazit**

Die Analyse zeigt, dass Delta-Hedging eine effektive Methode zur Risikominderung ist, da es Schwankungen des Basiswerts weitgehend ausgleicht. Allerdings sind Hedgingfehler, die zwischen den diskreten Anpassungszeitpunkten auftreten, nicht zu vernachlässigen. In negativen Marktszenarien kann das Hedging den Abwärtstrend des Basiswertes abfedern, reicht jedoch oft nicht aus, um die angestrebte Garantie zu erfüllen. In positiven Szenarien kann das Hedging die Gesamtergebnisse negativ beeinflussen, da das Hedge-Portfolio durch Hedgingfehler negative Werte annehmen kann.

Monatliches Delta-Hedging erwies sich als besonders effizient zur Minimierung von Verlusten. Durch verschiedene Modifikationen des monatlichen Delta-Hedgings wurde analysiert, wie sich mehr oder weniger Sicherheit auf die Rendite- und Risikokennzahlen auswirkt. Dabei zeigte sich, dass die Produkte trotz unterschiedlicher Konzeption in einigen Aspekten ähnliche Ergebnisse erzielten. Jedoch konnten bei genauerer Analyse Unterschiede festgestellt werden, die aus Kundensicht von Bedeutung sind.

Zusammenfassend lässt sich feststellen, dass die Wahl der Hedgingstrategie und deren Anpassungshäufigkeit einen entscheidenden Einfluss auf

die Performance fondsgebundener Versicherungsprodukte haben. Die Inanspruchnahme von Sicherheit durch Hedging kann Risiken effektiv mindern, jedoch auch die Renditechancen in positiven Marktszenarien begrenzen. Der Verzicht auf Sicherheitsmaßnahmen kann höhere Renditen ermöglichen, geht jedoch mit einem erhöhten Risiko einher. Die optimale Balance zwischen Sicherheit und Rendite hängt daher stark von den individuellen Präferenzen und Risikotoleranzen der Versicherungsnehmer ab