UNIVERSITÄT ULM

Abgabe: Freitag, 28.04.2017


Dr. Jochen Glück
Marius Müller
Fabian Rupp
Sommersemester 2017
Punktzahl: 13


# Lösungsvorschlag Elemente der Funktionalanalysis: Blatt 1

**3.** Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter $\mathbb{K}$-Vektorraum.

(a) Zeigen Sie, dass $B_r(x)$ für alle $x \in V, r > 0$ offen ist. (1)

*Hinweis: Wenn Sie Lust haben, können Sie auch zeigen, dass das sogar in jedem metrischen Raum gilt.*

**Lösungsvorschlag:** Sei $(V, d)$ ein metrischer Raum, $y \in B_r(x)$. Dann ist $B_{r'}(y) \subseteq B_r(x)$ für $r' := r - d(x, y) > 0$, denn für $z \in B_{r'}(y)$ gilt

$$d(z, x) \le \underbrace{d(z, y)}_{<r'} + d(y, x) < r,$$

also $z \in B_r(x)$.

(b) Zeigen Sie, dass $\overline{B_r(x)} = \{y \in V \mid \|x - y\| \le r\}$ für alle $x \in V, r > 0$ gilt. *Hinweis: Für jede Teilmenge $S$ eines metrischen Raumes bezeichnen wir mit $\overline{S}$ den Abschluss von $S$.* (1)

**Lösungsvorschlag:** Sei nun $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum, $y \in \overline{B_r(x)}$. Dann gibt es $x_n \in B_r(x)$ mit $x_n \to y$. Weil die Norm stetig ist gilt dann

$$\|x - y\| = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\|x_n - y\|}_{<r} \le r,$$

also gilt die Inklusion „ $\subseteq$ “.
Für die andere Inklusion sei $y \in V$ mit $\|x - y\| \le r$. Definiere

$$x_n := x + \frac{n}{n+1}(y - x),$$

dann gilt $x_n \to y$. Weiter ist $\|x_n - x\| = \frac{n}{n+1}\|y - x\| < r$, also gilt $x_n \in B_r(x)$, damit $y \in \overline{B_r(x)}$.

(c) Sei nun $(M, d)$ ein metrischer Raum und sei $x \in M$, $r > 0$. Zeigen Sie anhand eines konkreten Gegenbeispiels, dass nicht notwendigerweise $\overline{B_r(x)} = \{y \in V \mid d(x, y) \le r\}$ gilt. (1)

**Lösungsvorschlag:** Sei $M$ eine Menge mit $|M| \ge 2$ und

$$d(x, y) = \left\{ \begin{array}{ll} 0, & \text{falls } x = y \\ 1, & \text{falls } x \ne y \end{array} \right\}$$

die diskrete Metrik. Dann gilt $B_1(x) = \{x\}$, aber $\{y \in M \mid d(x, y) \le 1\} = M \ne \{x\}$, da $|M| \ge 2$.

*Bemerkung: Es gilt für einen metrische Raum $(M, d)$ aber dennoch die Inklusion*

$$\overline{B_r(x)} \subseteq \{y \in M \mid d(x, y) \le r\}.$$