ÜBER DAS SPEKTRUM REGULÄRER OPERATOREN

DISSERTATION
der Mathematischen Fakultät
der Eberhard–Karls–Universität zu Tübingen
zur Erlangung des Grades eines Doktors
der Naturwissenschaften

vorgelegt von

WOLFGANG ARENDT

aus Herzberg

1979

ÜBER DAS SPEKTRUM REGULÄRER OPERATOREN

DISSERTATION

der Mathematischen Fakultät
der Eberhard–Karls–Universität zu Tübingen
zur Erlangung des Grades eines Doktors
der Naturwissenschaften

vorgelegt von

WOLFGANG ARENDT
aus Herzberg

1979

Tag der mündlichen Qualifikation:	3o. August 1979
Dekan:	Prof. Dr. H. Salzmann
1. Berichterstatter:	Prof. Dr. H. H. Schaefer
2. Berichterstatter:	Prof. Dr. M. Wolff

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Die Banachalgebra $M^b(G)$ der beschränkten Radonmaße auf einer lokal kompakten Gruppe G ist von zentraler Bedeutung in der Harmonischen Analyse, und zu ihrer Untersuchung bedient man sich gern der Darstellung $\mu \to T_\mu$ mit $T_\mu f = \mu * f$ dieser Algebra auf $L^2(G)$. Dadurch wird auf der einen Seite die wohlentwickelte und weitreichende Theorie der Operatoren auf Hilberträumen nutzbar gemacht, auf der anderen Seite gehen aber wichtige strukturelle Gesichtspunkte verloren. In diesem Zusammenhang sind die folgenden Punkte zu nennen:

1. $M^b(G)$ wird zwar mit einer Unteralgebra von $\mathcal{L}(L^2(G))$ identifiziert, diese ist jedoch i.a. nicht abgeschlossen.
2. Die algebraische Struktur wird insofern unzureichend übertragen, als das Spektrum von μ bzgl. der Banachalgebra $M^b(G)$ i.a. nicht mit $\sigma(T_\mu)$ übereinstimmt.
3. Die Abbildung $\mu \to T_\mu$ ist zwar bipositiv (d.h. $\mu \geqslant o$ ist äquivalent zu $T_\mu \geqslant o$), aber es ist unklar, wie sich andere Eigenschaften von μ, die mit der Ordnung von $M^b(G)$ zusammenhängen (z.B. absolute Stetigkeit, Singularität), auf T_μ übertragen und in dem Raum $\mathcal{L}(L^2(G))$ formulieren lassen.

Ein Weg, diese Nachteile zu überwinden, besteht darin, $L^1(G)$ statt $L^2(G)$ zu betrachten. Dann jedoch verliert man die Hilbertraumstruktur; insbesondere läßt sich die Involution von $M^b(G)$ nicht übertragen, und die Fourier-Plancherel-Transformation steht nicht mehr zu Verfügung (G abelsch oder kompakt). Dadurch ist es z.B. schwierig, das Spektrum von T_μ als Operator auf $L^1(G)$ zu berechnen. In dieser Arbeit wird ein anderer Weg beschritten. Wir ersetzen die Banachalgebra $\mathscr{L}(L^2(G))$ durch die "Banachverbandsalgebra" $\mathscr{L}^r(L^2(G))$, den Raum der regulären Operatoren auf $L^2(G)$. Es stellt sich heraus, daß $M^b(G)$ über die Zuordnung $\mu \to T_\mu$ zu einem Raum F^2, der eine abgeschlossene volle Unteralgebra und einen Unterverband von $\mathscr{L}^r(L^2(G))$ bildet, isometrisch isomorph ist, falls G amenabel ist. Durch diese Darstellung werden also alle Strukturen übertragen. Insbesondere ist das Spektrum eines Elementes μ von $M^b(G)$ identisch mit dem "Ordnungsspektrum" $\sigma_o(T_\mu)$ des Operators T_μ auf $L^2(G)$, d.h. mit dem Spektrum von T_μ in $\mathscr{L}^r(L^2(G))$. Das Zusammenfallen dieser Spektren gibt uns die Möglichkeit, Eigenschaften der Spektren von Maßen in $M^b(G)$ herzuleiten, zum anderen bietet sich hier aber auch die Möglichkeit, den reichhaltigen Bestand an Beispielen und Einsichten aus der Harmonischen Analyse in die Untersuchung des relativ neuen Begriffs des Ordnungsspektrums einzubringen. Die Diskussion dieses Begriffs

wird uns in Kapitel 3 und 4 beschäftigen, wobei das Hauptproblem darin besteht zu klären, für welche Operatoren die beiden Spektren übereinstimmen.
Für die Operatoren, die "in der Nähe" der Operatoren von endlichem Rang liegen, gibt es eine befriedigende Antwort: Operatoren, die sich in $\mathcal{L}^r(E)$ durch Operatoren von endlichem Rang approximieren lassen, haben gleiche Spektren. Es gibt jedoch kompakte Operatoren, deren Spektrum echt kleiner als deren Ordnungsspektrum ist.
Breiter Raum wird in Kapitel 4 der Untersuchung von Verbandsisomorphismen gewidmet. Die Frage der Übereinstimmung der Spektren steht auch hier im Mittelpunkt. Sie kann z.B. für atomare Banachverbände positiv gelöst werden. Was weitere Details anbetrifft, sei auf die ausführliche Kapiteleinleitung verwiesen.

Herrn Prof. Dr. H.H. Schaefer danke ich herzlich für die Anregung zu dieser Arbeit, für sein großes Interesse und für viele wertvolle Hinweise.
Ebenso gilt mein Dank Herrn Prof. Dr. M. Wolff für viele interessante und fruchtbare Diskussionen.

o. Vorbemerkungen

In diesem Abschnitt soll die Terminologie geklärt werden, die in der Arbeit benutzt wird. Sie richtet sich grundsätzlich nach dem Buch von H.H.Schaefer (1974): Banach Lattices and Positive Operators. Für die Theorie der Banachalgebren dient als Referenz das Buch von Bonsall-Duncan (1967) und für die Harmonische Analyse das von Hewitt-Ross (1963). Im einzelnen treffen wir die folgenden Vereinbarungen.

o.1 Banachverbände.

Zwischen reellen und komplexen Banachverbänden wird nur unterschieden, wenn es notwendig ist oder Mißverständnisse auftreten können. Ohne näheren Hinweis ist also eine Aussage über einen Banachverband richtig, wenn man sie reell oder komplex liest. Das gleiche gilt für spezielle Räume. So bezeichnet etwa $C_c(X)$ (X lokal kompakt) den Raum der reellwertigen oder den der komplexwertigen stetigen Funktionen auf X mit kompaktem Träger; oder M(X) ist der Raum der reellen oder der Raum der komplexen Radonmaße auf X. In Kapitel 3 und 4 ist der Grundkörper immer komplex.

Unter einem Operator verstehen wir stets eine stetige lineare Abbildung. Ist T ein Operator auf einem komplexen Banachverband E, so gibt es eindeutig bestimmte Operatoren

ReT, ImT, die $E_{\mathbb{R}}$ (den zu E gehörenden reellen Banachverband) invariant lassen, so daß $Tx = (ReT)x + i(ImT)x$ für alle $x \in E_{\mathbb{R}}$ gilt. ReT heißt der Realteil von T, ImT der Imaginärteil. T heißt reell, wenn T = ReT und positiv, wenn zusätzlich $Tx \geq o$ für alle $x \in E_+$. Weiter heißt T Verbandshomomorphismus, wenn $|Tz| = T|z|$ für alle $z \in E$ gilt.

Ein positiver Operator T heißt fast intervallerhaltend, wenn $\overline{T([o,x])} = [o,Tx]$ für alle $x \in E_+$ ist.

T heißt intervallerhaltend, wenn

$T([o,x]) = [o,Tx]$ für alle $x \in E_+$ gilt.

Dabei ist $[o,y] = \{w \in E \mid o \leq w \leq y\}$ für $y \in E_+$.

T ist genau dann fast intervallerhaltend, wenn T' ein Verbandshomomorphismus ist; und T ist genau dann ein Verbandshomomorphimus, wenn T' intervallerhaltend ist (Lotz (1974)).

Ein Banachverband E heißt atomar, wenn es eine Menge von von Atomen A in E gibt, so daß $A^{\perp\perp} = E$ ist. E heißt diffus, wenn E keine Atome besitzt. (Ein Element x von E_+, $x \neq o$, heißt Atom, wenn $o \leq y \leq x$ $(y \in E)$ nur gilt, wenn y skalares Vielfaches von x ist.)

o.2 Banachalgebren, Spektraltheorie

Ist A eine normierte Algebra mit Einselement e, so bezeichnen wir mit $\sigma_A(x)$ oder auch $\sigma(x)$, wenn kein

Mißverständnis entstehen kann, das Spektrum von x bzgl. A. D.h. es ist $\sigma(x) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid (\lambda e - x)$ ist nicht invertierbar$\}$. Wir setzen $R(\lambda,x) = (\lambda - x)^{-1}$ für $\lambda \notin \sigma(x)$. Den Spektralradius von x bezeichnen wir mit $r(x)$.

Ist T ein Operator auf einem Banachraum E, so bezeichnet $\sigma(T)$ immer das Spektrum von T bzgl. der Banachalgebra $\mathscr{L}(E)$ (der Operatoren auf E). Mit $A\sigma(T)$ wird das <u>approximative Punktspektum</u> von T bezeichnet.

Es gilt $\partial\sigma(T) \subset A\sigma(T)$, wobei $\partial\sigma(T)$ den topologischen Rand der Menge $\sigma(T)$ in $\mathbb{C}$ bezeichnet.

$r\sigma(T) = \sigma(T) \cap \Gamma_{r(T)}$ heißt das <u>Randspektrum</u> von T ($\Gamma_r = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = r\}$ $(r \in \mathbb{R}_+)$).

Eine Teilmenge σ von $\mathbb{C}$ heißt <u>zyklisch</u>, wenn gilt: Ist $r \cdot e^{i\theta} \in \sigma$, so ist auch $r \cdot e^{in\theta} \in \sigma$ für alle $n \in \mathbb{Z}$ $(r \in \mathbb{R}_+,\ \theta \in [0,2\pi[)$.

Sei B eine Unteralgebra von A. B heißt <u>voll</u> in A, wenn $x \in B$, x invertierbar in A, impliziert, daß $x^{-1} \in B$.

Ist B eine volle Unteralgebra von A mit $e \in B$, so ist $\sigma_A(x) = \sigma_B(x)$ für $x \in B$. Ist J ein algebraisches (Links- oder Rechts-) Ideal von A, $x \in J$, so ist $(\lambda e - x)^{-1} \in J$ für alle $\lambda \notin \sigma_A(x)$ (das sieht man aus der Resolventengleichung).

Lemma. <u>Sei</u> A <u>eine</u> <u>Banachalgebra</u>, $a \in A$. L_a <u>und</u> R_a <u>seien</u> <u>die</u> <u>durch</u> $L_a x = ax$ <u>und</u> $R_a x = xa$ <u>auf</u> A <u>definierten</u> <u>Operatoren</u>. <u>Es</u> <u>gilt</u> $\sigma_A(a) = \sigma(L_a) = \sigma(R_a)$.

Beweis. Sei $\lambda \notin \sigma(a)$. Dann ist $R_{(\lambda - a)^{-1}} \circ (\lambda - R_a) = (\lambda - R_a) \circ R_{(\lambda - a)^{-1}} = I$. Daher ist $\lambda \notin \sigma(R_a)$.
Sei umgekehrt $\lambda \notin \sigma(R_a)$. Setze $S = (\lambda - R_a)^{-1}$.
Für $x,y \in A$ ist $S(x\cdot y) = S(x\cdot((\lambda - R_a)Sy)) = S(\lambda - R_a)(x\cdot Sy) = x\cdot Sy$. Daher ist $Sx = x\cdot Se$ (setze $y = e$).
Für $x = (\lambda - a)$ gilt somit $(\lambda - a)\cdot Se = S((\lambda - a)\cdot e) = S(\lambda - R_a)e = e$ und $(Se)\cdot(\lambda - a) = (\lambda - R_a)Se = e$. Somit ist $(\lambda - a)^{-1} = Se$.
Wir haben bewiesen, daß $\sigma_A(a) = \sigma(R_a)$ ist. Der Beweis für L_a geht genauso.

o.3 Harmonische Analyse

Sei G eine lokal kompakte Gruppe. Mit $M^b(G)$ bezeichnen wir den Raum der beschränkten Radonmaße auf G (dessen Elemente wir auch manchmal mit regulären, beschränkten Borelmaßen identifizieren). Für $\mu, \nu \in M^b(G)$ ist die Faltung $\mu * \nu \in M^b(G)$ durch $\langle f, \mu * \nu\rangle = \iint f(st)\, d\mu(s)\, d\nu(t)$ $(f \in C_c(G))$ definiert. $M^b(G)$ ist bzgl. der Faltung eine Banachalgebra mit δ_e als Einheit (δ_e ist das Diracmaß in dem Einselement e der Gruppe G).
Mit $\sigma(\mu)$ ist immer das Spektrum von μ bzgl. $M^b(G)$ gemeint $(\mu \in M^b(G))$.
Sei f eine Funktion auf G. Mit $\check{f}$ bezeichnen wir die durch $\check{f}(s) = f(s^{-1})$ $(s \in G)$ definierte Funktion. Für $\mu \in M^b(G)$ setzen wir $\langle f, \check{\mu}\rangle = \langle \check{f}, \mu\rangle$ und $\langle f, \mu^*\rangle = \overline{\langle \check{\bar{f}}, \mu\rangle}$ $(f \in C_c(G))$.

Die Abbildung $\mu \to \mu^*$ definiert eine Involution auf $M^b(G)$. Mit m bezeichnen wir das Haarmaß auf G. Die Begriffe "absolut stetig" und "singulär" beziehen sich immer auf m. Das von den Diracmaßen in $M^b(G)$ erzeugte Band wird mit $M_a(G)$ bezeichnet. Die Elemente von $M_a(G)$ heißen die <u>atomaren</u> Maße auf G. Ein Maß heißt <u>diffus</u>, wenn es in $M_a(G)^\perp$ liegt. Die Räume $L^p(G)$ sind bzgl. des Haarmaßes definiert. Für $\int f(s)\, dm(s)$ schreiben wir i.a. $\int f(s)\, ds \quad (f \in L^1(G))$.
Ist X eine Menge und $A \subset X$, so bezeichnet 1_A die charakteristische Funktion von A.

Kompakte Gruppen.
Wir wählen die Notationen wie in Dunkl, Ramirez (1971).
Sei G eine kompakte Gruppe. Der Dual $\hat{G}$ von G ist die Menge aller stetigen, irreduziblen, unitären Darstellungen von G. Zu jedem $\alpha \in \hat{G}$ wählen wir ein $T_\alpha \in \alpha$. T_α ist ein stetiger Homomorphismus von G in die Gruppe $\mathbb{U}(n_\alpha)$ der unitären $n_\alpha \times n_\alpha$-Matrizen. Für $s,t \in G$ ist
$T_\alpha(s \cdot t) = T_\alpha(s) \circ T_\alpha(t)$ und $T_\alpha(s^{-1}) = T_\alpha(s)^{-1} = T_\alpha(s)^*$.
Mit $T_{\alpha ij}(s)$ bezeichnen wir die Koeffizienten von $T_\alpha(s)$. Die Funktionen $s \to T_{\alpha ij}(s)$ $(s \in G)$ heißen <u>Koeffizientenfunktionen</u> $(\alpha \in \hat{G}, 1 \leq i,j \leq n_\alpha)$ und ihre Linearkombinationen <u>trigonometrische</u> <u>Polynome</u>.

Die Fourier-Transformierte $\mathfrak{F}f = \hat{f}$ von $f \in L^1(G)$ ist eine Familie $(\hat{f}_\alpha)_{\alpha \in \hat{G}}$ von Matrizen, wobei $\hat{f}_\alpha \in \mathbb{U}(n_\alpha)$

durch $\hat{f}_{\alpha ij} = \int f(s)\, T_{\alpha ij}(s^{-1})\, ds \quad (1 \leq i,j \leq n_\alpha)$ definiert ist.

Die Einschränkung von $\mathcal{F}$ auf $L^2(G)$ heißt <u>Fourier-Plancherel--Transformation</u>. Sie ist ein unitärer Operator auf den Raum

$$\mathcal{L}^2(\hat{G}) := \{(\Phi_\alpha)_{\alpha\in\hat{G}} \mid \Phi_\alpha\ n_\alpha x\ n_\alpha\text{-Matrix}, \sum_{\alpha\in\hat{G}} n_\alpha ||\Phi_\alpha||_2^2 < \infty\}$$

($||\Phi_\alpha||_2^2 = tr(\Phi_\alpha^* \circ \Phi_\alpha)$, tr bezeichne die Spur).

$\mathcal{L}^2(\hat{G})$ ist ein Hilbertraum mit dem Skalarprodukt

$$(\Phi,\Psi) = \sum_{\alpha\in\hat{G}} n_\alpha\ tr(\Psi_\alpha^* \circ \Phi_\alpha).$$

1. Banachverbandsalgebren regulärer Operatoren

Viele der in dieser Arbeit auftretenden Objekte tragen die Struktur einer "Banachverbandsalgebra". Meistens handelt es sich um Räume regulärer Operatoren. In diesem Kapitel werden zahlreiche Beispiele zusammengestellt, auf die dann im Laufe der Arbeit zurückgegriffen werden kann.

Der Raum $\mathcal{L}^r(E)$ der regulären Operatoren auf einem Banachverband E ist bzgl. der natürlichen Ordnung i.a. kein Verband, jedoch enthält er immer das Zentrum Z(E) von E und das von U.Schlotterbeck (1974) eingeführte Tensorprodukt $E' \tilde{\otimes}_e E$ als "Unterverbände". Das ist genauso wie die in diesem Kapitel beschriebenen Eigenschaften von Z(E) mehr oder weniger bekannt, jedoch scheint es in der Literatur keine für diese Arbeit geeignete Darstellung (die insbesondere den komplexen Fall beinhaltet) zu geben.

Ist E ordnungsvollständig, so ist $\mathcal{L}^r(E)$ eine Banachverbandsalgebra. Das Band der Kernoperatoren und das von den Verbandsisomorphismen erzeugte Band sind Unteralgebren von $\mathcal{L}^r(E)$. Die beiden Bänder sind orthogonal, wenn E diffus ist. Wir erhalten somit eine Bandzerlegung von $\mathcal{L}^r(E)$, die ganz analog zu der kanonischen Zerlegung von $M^b(G)$ ist, wie dann in Kapitel 2 gezeigt wird.

1.1 Definition. Sei E ein Banachverband über $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$). Ein Operator T auf E heißt <u>regulär</u>, wenn T Linearkombination über $\mathbb{K}$ von positiven Operatoren ist. Der Raum der regulären Operatoren auf E wird mit $\mathscr{L}^r(E)$ bezeichnet.

Aus der Definition folgt, daß sich ein regulärer Operator T auf einem Banachverband E als Differenz zweier positiver Operatoren schreiben läßt, falls E reell ist; ist E komplex, so gibt es positive Operatoren R_j $(j=1..4)$, so daß $T = R_1 - R_2 + i(R_3 - R_4)$ ist. Aus II 5.3 in Schaefer (1974) ergibt sich, daß jeder reguläre Operator stetig ist. $\mathscr{L}^r(E)$ ist bzgl. des positiven Kegels $\mathscr{L}(E)_+ = \{T \in \mathscr{L}(E) \mid T \geq o\}$ ein geordneter Vektorraum. Offensichtlich ist $\mathscr{L}^r(E)$ eine Unteralgebra von $\mathscr{L}(E)$. Man kann auf $\mathscr{L}^r(E)$ folgendermaßen eine Norm definieren, bzgl. der $\mathscr{L}^r(E)$ eine Banachalgebra bildet:

$$||T||_r = \inf \{||S|| \mid S \in \mathscr{L}(E)_+ \text{ mit } |Tz| \leq S|z| \text{ für } z \in E\}$$

($T \in \mathscr{L}^r(E)$). Die Normeigenschaften sind klar, ebenso folgende Beziehungen:

$$||T|| \leq ||T||_r \quad \text{für alle } T \in \mathscr{L}^r(E)$$
$$||T||_r = ||T|| \quad \text{für alle } T \in \mathscr{L}(E)_+$$
$$||T_1 T_2||_r \leq ||T_1||_r ||T_2||_r \quad \text{für } T_1, T_2 \in \mathscr{L}^r(E)$$

1.2 Lemma. <u>Sei</u> E <u>ein</u> <u>Banachverband</u>, $S,T \in \mathcal{L}^r(E)$.

<u>Äquivalent sind</u>:

(i) $|Tz| \leq S|z|$ <u>für alle</u> $z \in E$

(ii) $\mathrm{Re}(e^{-i\theta}T) \leq S$ <u>für alle</u> $\theta \in [o,2\pi[$

Beweis. Sei j die kanonische Einbettung von E in E''.
Die Behauptung folgt aus der folgenden Äquivalenzkette:

$|Tz| \leq S|z|$ für alle $z \in E$ $\Leftrightarrow$

$|jTz| = j|Tz| \leq jS|z|$ für alle $z \in E$ $\Leftrightarrow$

$\mathrm{Re}(e^{-i\theta}jT) \leq jS$ für alle $\theta \in [o,2\pi[$ (Schaefer (1974) IV 1.8)

$\Leftrightarrow$ $\mathrm{Re}(e^{-i\theta}T) \leq S$ für alle $\theta \in [o,2\pi[$.

Aus dem Lemma folgt, daß die Norm eines reellen Operators $T \in \mathcal{L}^r(E)$ durch die Formel

$||T||_r = \inf \{ \, ||S|| \mid S \in \mathcal{L}(E)_+, \pm T \leq S\}$

gegeben ist. Die Vollständigkeit von $\mathcal{L}^r(E_{\mathbb{R}})$ ist daraus leicht zu sehen (siehe auch Schaefer (1974) IV exercise 3). Damit folgt die Vollständigkeit von $\mathcal{L}^r(E_{\mathbb{C}})$ aus der offensichtlichen Ungleichung

$\max \{||\mathrm{Re}T||_r, ||\mathrm{Im}T||_r\} \leq ||T||_r \leq ||\mathrm{Re}T||_r + ||\mathrm{Im}T||_r$.

Lemma 1.2 zeigt insbesondere, daß die Existenz von $\sup \{ \mathrm{Re}(e^{-i\theta}T) \mid \theta \in [o,2\pi[\}$ äquivalent zur Existenz von $\inf \{ S \in \mathcal{L}(E)_+ \mid \ |Tz| \leq S|z|$ für alle $z \in E \}$ in $\mathcal{L}^r(E)$ ist, und beide Werte gleich sind. Der gemeinsame Wert,

falls er existiert, heißt <u>Betrag</u> von T und wird mit $|T|$ bezeichnet. Wenn $|T|$ existiert, ist $||T||_r = |||T|||$. Natürlich ist $|T| = \sup \{ T, -T \}$ in dem geordneten Vektorraum $\mathcal{L}^r(E_{\mathbb{R}})$, wenn T reell ist.
Der Betrag von T existiert und ist gegeben durch
$|T|x = \sup \{|Ty| \mid |y| \leq x\}$ für $x \in E_+$,
falls das Supremum für alle $x \in E_+$ existiert. Somit ist, wenn E ordnungsvollständig ist, $\mathcal{L}^r(E_{\mathbb{R}})$ ein reeller Banachverband und $\mathcal{L}^r(E_{\mathbb{C}})$ seine Komplexifizierung (vgl. Schaefer (1974) IV 1.8).
Ist E ein Raum vom Typ C(X) (X kompakt, stonesch) oder $L^1(X,\Sigma,\mu)$, so ist $\mathcal{L}(E) = \mathcal{L}^r(E)$ (Schaefer (1974) IV 1.5).

1.3 Korollar. <u>Sei</u> E <u>ein</u> <u>Banachverband</u> <u>und</u> $b: E \times E \to E$ <u>eine</u> <u>bilineare</u> <u>Abbildung</u> <u>mit</u> $b(x,y) \geq 0$ <u>für</u> $x,y \in E_+$. <u>Dann</u> <u>gilt</u> $|b(x,y)| \leq b(|x|,|y|)$ <u>für</u> <u>alle</u> $x,y \in E$.

Beweis. Sei $x \in E$. Durch $b_x(y) := b(x,y)$ $(y \in E)$ wird ein regulärer Operator b_x auf E definiert. Ist y positiv, so gilt:
$(\mathrm{Re}\, e^{-i\theta} b_x)y = \mathrm{Re}\, b(e^{-i\theta}x,y) = b(\mathrm{Re}\, e^{-i\theta}x,y) \leq b(|x|,y)$
$= b_{|x|}(y)$ für alle $\theta \in [0,2\pi[$. Nach 1.2 gilt daher
$|b(x,y)| = |b_x(y)| \leq b_{|x|}(|y|) = b(|x|,|y|)$ für alle $y \in E$.

1.4 Definition. Eine reelle Banachverbandsalgebra ist ein reeller Banachverband A, auf dem eine Multiplikation $\cdot$ gegben ist, bzgl. der A eine reelle Algebra ist, so daß gilt:

$$x \cdot y \geq o$$
$$||x \cdot y|| \leq ||x|| \; ||y||$$

für alle $x,y \in A_+$.

Eine komplexe Banachverbandsalgebra ist die Komplexifizierung (als Banachverband) einer reellen Banachverbandsalgebra.

Die auf dem Realteil einer komplexen Banachverbandsalgebra A definierte Multiplikation kann eindeutig auf A fortgesetzt werden, so daß A eine komplexe Algebra bildet. Das folgende Lemma zeigt, daß A auf diese Weise eine Banachalgebra bildet.

1.5 Lemma. Sei A eine (reelle oder komplexe) Banachverbandsalgebra. Dann gilt für alle $x,y \in A$

$$|x \cdot y| \leq |x| \cdot |y|$$
$$||x \cdot y|| \leq ||x|| \; ||y||$$

Der Beweis ergibt sich unmittelbar aus 1.3 und der Definition.

Eine Abbildung T zwischen zwei Banachverbandsalgebren heißt Isomorphismus von Banachverbandsalgebren, wenn T ein Verbandsisomorphismus und ein algebraischer Homomorphismus ist. Zwei Banachverbandsalgebren heißen isomorph, wenn ein solcher Isomorphismus zwischen ihnen existiert; sie heißen isometrisch-isomorph, wenn es einen isometrischen Isomorphismus zwischen ihnen gibt.

1.6 Beispiele. 1. $A = C(X)$, der Raum der reellwertigen (komplexwertigen) stetigen Funktionen auf einem kompakten Raum X, versehen mit der punktweisen Multiplikation, ist eine reelle (komplexe) Banachverbandsalgebra.
2. Der Raum $A = M^b(G)$ der beschränkten regulären Borelmaße auf einer lokal kompakten Gruppe G, versehen mit der Faltung als Multiplikation, ist eine Banachverbandsalgebra. Es gilt $||x \cdot y|| = ||x|| \; ||y||$ für alle $x,y \in A_+$.
(A ist komplex oder reell, je nachdem ob die reellen oder die komplexen Maße auf G betrachtet werden. Auch im folgenden wollen wir - ähnlich wie bei den Banachverbänden - zwischen komplexen und reellen Banachverbandsalgebren nur unterscheiden, wenn Mißverständnisse auftreten können. Ohne Hinweis kann also eine Aussage komplex oder reell gelesen werden.)
3. $L^1(G)$, mit der Faltung als Multiplikation, ist eine Banachverbandsalgebra. $L^1(G)$ ist als Banachverbandsalgebra

zu dem Raum $M_{ac}(G)$ der absolut stetigen Maße in $M^b(G)$ isometrisch isomorph (Satz von Radon-Nikodym). $M_{ac}(G)$ ist ein Band und ein algebraisches Ideal in $M^b(G)$.

4. Sei G eine kompakte Gruppe, $1 \leq p \leq \infty$. $L^p(G)$, versehen mit der Faltung als Multiplikation, ist eine Banachverbandsalgebra.

5. Sei E ein ordnungsvollständiger Banachverband. Der Raum $\mathcal{L}^r(E)$ der regulären Operatoren auf E ist eine Banachverbandsalgebra.

6. Sei E ein Banachverband. Das Zentrum Z(E) von E ist eine Banachverbandsalgebra. Dieses Beispiel soll durch die folgenden Sätze erläutert werden.

1.7 Definition. Sei E ein Banachverband. Der Raum der Operatoren $T \in \mathcal{L}(E)$ mit der Eigenschaft, daß $TJ \subset J$ für jedes Ideal J von E gilt, heißt das Zentrum von E und wird mit Z(E) bezeichnet.

Der folgende Satz ist zwar bekannt, nicht alle seine Aussagen können jedoch in dieser Form (die insbesondere den komplexen Fall einschließt) in der Literatur gefunden werden. Daher geben wir einen Beweis an.

1.8 Satz. Sei E ein (reeller oder komplexer) Banachverband, $Z(E)$ sein Zentrum.
Jedes $T \in Z(E)$ besitzt einen Betrag, für den gilt:
$|Tz| = |T||z|$ für alle $z \in E$,
$|T| \leq ||T||I$ (insbesondere $|T| \in Z(E)$),
$||T|| = |||T||| = ||T||_r$.
$Z(E)$, mit der von $\mathcal{L}^r(E)$ induzierten Ordnung, Norm und Multiplikation versehen, ist eine Banachverbandsalgebra, die isometrisch isomorph zu einem $C(X)$ ist.
Es ist $\sigma_{Z(E)}(T) = \sigma(T)$ für alle $T \in Z(E)$.

Der Beweis wird mit Hilfe mehrerer Lemmata geliefert.

1.9 Lemma. Sei $E = C(X)$, $T \in Z(E)$. Sei $h = T1_X$.
Es gilt $Tf = h \cdot f$ für alle $f \in C(X)$.

Beweis. Sei $f \in C(X)$, $s \in X$. $J = \{g \in C(X) \mid g(s) = o\}$ ist ein Ideal in E. Da $(f - f(s)1_X) \in J$, ist nach Voraussetzung $T(f - f(s)1_X) = Tf - f(s)h \in J$, d.h. es ist $(Tf)(s) = h(s)f(s)$.

1.1o Lemma. Sei $T \in Z(E)$. Dann besitzt T einen Betrag, für den die Gleichung gilt

$|Tz| = |T||z|$ für alle $z \in E$.

Ferner gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, so daß gilt

$|T| \leq nI$.

Beweis. Sei $T \in Z(E)$. Aus der Voraussetzung folgt, daß für jedes $z \in E$ $E_{|z|}$ unter T invariant ist, und daß die Einschränkung von T auf $E_{|z|}$ im Zentrum von $E_{|z|}$ liegt.
Daher sieht man aus 1.9, daß
$|Tz| = \sup\{|Tu| \mid |u| \leq |z|\}$ ist. Somit existiert der Betrag von T, und es ist $|Tz| = |T||z|$ für $z \in E$.
Sei $x \in E_+$. Da E_x unter T invariant ist, gibt es ein $k \in \mathbb{R}_+$, so daß $|T|x = |Tx| \leq kx$.
Setze: $k(x) = \inf\{k \in \mathbb{R}_+ \mid |T|x \leq kx\}$ für $x \in E_+$.
Zu zeigen ist, daß die Menge $\{k(x) \mid x \in E_+\}$ beschränkt ist. Ist das nicht der Fall, so gibt es für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in E_+$ mit $||x_n|| = 2^{-n}$, so daß $k(x_n) > n$.
Sei $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$. Nach Voraussetzung gilt $T(E_x) \subset E_x$.
Aus $x_n \in E_x$ und $k(x_n) > n$ $(n \in \mathbb{N})$ ergibt sich ein Widerspruch zu 1.9.

1.11 Korollar. Sei T ein positiver Operator auf einem Banachverband E, so daß $Tx \wedge y = o$ für alle $x,y \in E$ mit $x \wedge y = o$. Dann ist $T \in Z(E)$.

Beweis. Sei $x \wedge y = o$. Dann ist $Tx \wedge y = o$, und somit $Tx \wedge Ty = o$ nach Voraussetzung. T ist also ein Verbandshomomorphimus (Schaefer (1974) II 2.5).
Sei J ein Ideal in E, $x \in J_+$. Zu zeigen ist $Tx \in J$.
Sei $\lambda > r(T)$ und $u = (\lambda - T)^{-1}x$. Mit Hilfe der Neumann-Reihe sieht man, daß $x \leq \lambda u$ und $TE_u \subset E_u$.
Sei $T_o = T|_{E_u}$, $E_u = C(X)$. Da T_o ein Verbandshomomorphismus ist, gibt es eine Abbildung $\varphi: X \to X$ und ein $h \in C(X)_+$, so daß $T_o f = h \cdot f \circ \varphi$ für alle $f \in C(X)$.
Angenommen, es gibt $s \in X$ mit $h(s) > o$, so daß $s \neq \varphi(s)$. Dann existieren $f,g \in C(X)_+$ mit $f \wedge g = o$, so daß $f(\varphi(s)) = 1$ und $g(s) = h(s)$. Somit ist
$(T_o f \wedge g)(s) = h(s)f(\varphi(s)) \wedge g(s) = h(s) > o$, Widerspruch!
Also ist $T_o f = hf$ für alle $f \in C(X)$. Somit ist
$|Tx| = |T_o x| \leq ||h||_\infty x$, und daher ist $Tx \in J$.

1.12 Lemma. <u>Sei</u> E <u>ein</u> <u>ordnungsvollständiger</u> <u>Banachverband</u>, $T \in \mathcal{L}(E)$. <u>Gilt</u> $Tx \perp y$ <u>für</u> <u>alle</u> $x,y \in E$ <u>mit</u> $x \perp y$, <u>so</u> <u>ist</u> $T \in Z(E)$.

Beweis. 1. Sei $x,y \in E_+$. Dann ist $|T(x+y)| = |Tx| + |Ty|$.
Sei nämlich $u = x \vee y$, $E_u = C(X)$. X ist ein kompakter stonescher Raum. Daher kann man x durch Funktionen f und y durch Funktionen g der Form

$$f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i 1_{A_i} ; \quad g = \sum_{i=1}^{n} \beta_i 1_{A_i}$$

in C(X) und damit auch in E approximieren, wobei $\{A_i \mid i=1\ldots n\}$ eine Zerlegung von X in offen-abgeschlossene Teilmengen und $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}_+$ $(i=1\ldots n)$ ist.
Da $1_{A_i} \wedge 1_{A_j} = o$ für $i \neq j$ ist, ist $T1_{A_i} \perp T1_{A_j}$ für $i \neq j$ nach Voraussetzung. Somit gilt:

$$\begin{aligned} |T(f+g)| &= \left|\sum_{i=1}^{n} (\alpha_i+\beta_i)\, T1_{A_i}\right| = \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i+\beta_i)\, |T1_{A_i}| \\ &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, |T1_{A_i}| + \sum_{i=1}^{n} \beta_i\, |T1_{A_i}| \\ &= \left|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, T1_{A_i}\right| + \left|\sum_{i=1}^{n} \beta_i\, T1_{A_i}\right| \\ &= |Tf| + |Tg|. \end{aligned}$$

Damit gilt auch $|T(x+y)| = |Tx| + |Ty|$.

2. Die Abbildung $E_+ \to E_+$ $(x \to |Tx|)$ ist also additiv. Sei S die lineare Fortsetzung dieser Abbildung auf E. Dann ist $\mathrm{Re}(e^{-i\theta}T) \leq S$ für alle $\theta \in [o,2\pi[$.
Also existiert $|T|$ und es ist $S = |T|$. Weiter ist: $|T|x \wedge y = |Tx| \wedge y = o$ für $x \wedge y = o$. Also ist $|T| \in Z(E)$ nach 1.11 und daher auch $T \in Z(E)$.

1.13 Lemma. <u>Sei</u> E <u>ein</u> <u>Banachverband</u>, $T \in \mathcal{L}(E)$.

<u>Es</u> <u>ist</u> $T \in Z(E)$ <u>äquivalent</u> <u>zu</u> $T' \in Z(E')$.

Beweis. 1. Sei T reell. Dann folgt die Behauptung aus den folgenden Implikationen, die für jedes $n \in \mathbb{N}$ gelten:
$-nI \leq T \leq nI \Rightarrow -nI \leq T' \leq nI \Rightarrow -nI \leq T'' \leq nI$
$\Rightarrow -nI \leq T \leq nI$.
2. Für beliebiges T folgt die Behauptung aus 1., da $T \in Z(E)$ äquivalent zu $\mathrm{Re}T \in Z(E)$, $\mathrm{Im}T \in Z(E)$ ist.

1.14 Lemma. <u>Sei</u> E <u>ein</u> <u>Banachverband</u>.
$Z(E)$ <u>ist</u> <u>eine</u> <u>volle</u> <u>Unteralgebra</u> <u>von</u> $\mathcal{L}(E)$.

Beweis. Sei T invertierbar in $\mathcal{L}(E)$ und $T \in Z(E)$. Setze $S = T'$. Sei P eine Bandprojektion auf ein Band B von E'. Da $S \in Z(E')$ nach 1.13, ist $SB \subset B$ und $SB^{\perp} \subset B^{\perp}$. Somit ist $SP = PS$. Daraus folgt
$S^{-1}P = S^{-1}PSS^{-1} = S^{-1}SPS^{-1} = PS^{-1}$, insbesondere ist $S^{-1}B \subset B$. S^{-1} läßt also jedes Band von E' invariant. Nach 1.12 ist also $S^{-1} = (T^{-1})' \in Z(E')$ und damit nach 1.13 $T^{-1} \in Z(E)$.

Beweis von 1.8. Aus 1.1o folgt, daß
$$Z(E) = \{T \in \mathcal{L}(E) \mid \text{es existiert } |T| \text{ und gibt ein } n \in \mathbb{N}, \text{ so daß } |T| \leq nI\}.$$
Durch $p(T) = \inf\{ k \in \mathbb{R}_+ \mid |T| \leq kI\}$ wird eine Norm

auf $Z(E)$ definiert, für die $||T|| \leq |||T||| \leq p(T)$ gilt. $Z(E)$ ist bzgl. dieser Norm vollständig.

Sei nämlich (T_n) eine Cauchy-Folge bzgl. p. Dann ist (T_n) auch eine Cauchy-Folge in $\mathcal{L}(E)$.

Sei $T = \lim\limits_{n\to\infty} T_n$ (in $\mathcal{L}(E)$). Sei $\varepsilon > 0$. Es gibt ein $n_o \in \mathbb{N}$, so daß $|T_n - T_m| \leq \varepsilon I$ für alle $n,m \geq n_o$.

D.h. es ist für $z \in E$ $|(T_n - T_m)z| \leq \varepsilon|z|$. Daher ist $|(T - T_m)z| = \lim\limits_{n\to\infty} |(T_n - T_m)z| \leq \varepsilon|z|$ für alle $m \geq n_o$.

Es ist also $p(T - T_m) \leq \varepsilon$ für alle $m \geq n_o$.

Wir haben also $\lim\limits_{n\to\infty} T_n = T$ in $(Z(E),p)$.

Somit ist $(Z(E),p)$ mit der von $\mathcal{L}^r(E)$ induzierten Ordnung ein AM-Raum mit der Einheit I. Nach dem Satz von Kakutani gibt es einen Verbandsisomorphismus U von $C(X)$ auf $Z(E)$ mit $U1_X = I$.

Offensichtlich ist $Z(E)$ eine Unteralgebra von $\mathcal{L}(E)$.

Wir zeigen, daß U ein algebraischer Homomorphismus ist.

Sei $g \in C(X)$. Durch $Tf = U^{-1}(Ug \circ Uf)$ $(f \in C(X))$ wird ein Operator $T \in Z(C(X))$ definiert (es ist nämlich $|Tf| \leq U^{-1}(||g||_\infty U1_X \circ U|f|) = ||g||_\infty |f|$ für $f \in C(X)$).

Somit ist $Tf = (T1_X)\cdot f = g\cdot f$ für alle $f \in C(X)$, d.h. es gilt $U(g\cdot f) = Ug \circ Uf$.

U ist isometrisch: Da nach 1.14 $Z(E)$ eine volle Unteralgebra von $\mathcal{L}(E)$ ist, gilt für $T \in Z(E)$:

$\sigma(T) = \sigma_{Z(E)}(T) = \sigma_{C(X)}(U^{-1}(T))$. Daher ist

$||T|| \leq p(T) = ||U^{-1}(T)||_{C(X)} = r(U^{-1}T) = r(T) \leq ||T||$.

Damit ist $||U^{-1}(T)||_{C(X)} = ||T||$ für alle $T \in Z(E)$, d.h. U^{-1} und damit auch U ist isometrisch. Es ist jetzt alles bewiesen.

1.11 wird von L.Martignon (1978) direkt, ohne Benutzung des Darstellungssatzes von Kakutani bewiesen. In der Arbeit wird ferner gezeigt, daß die punktweise Multiplikation die einzige Multiplikation auf C(X) ist, so daß C(X) eine Banachverbandsalgebra mit 1_X als algebraischer Einheit bildet. Der Beweis dieses Satzes wurde in 1.8 implizit zum Nachweis der Homomorphie-Eigenschaft von U benutzt.
In Flösser (1977) wird eine ausführliche Behandlung des Zentrums von Vektorverbänden gegeben. Hier seien noch einige Bemerkungen zusammengestellt, die später benötigt werden.

1.15 Bemerkungen. 1. Sei E ein Banachverband. Jede Bandprojektion P liegt im Zentrum (denn es gilt $o \leq P \leq I$). Identifiziert man Z(E) mit C(X), so definiert $f \in C(X)$ genau dann eine Bandprojektion, wenn $f = 1_A$ ist für eine offen-abgeschlossene Teilmenge A von X.
2. Sei $P = 1_A$ eine solche Bandprojektion mit $PE = E_1$.

Man kann offenbar $Z(E_1)$ mit dem Raum der Operatoren in $Z(E)$ identifizieren, die auf $E_1^{\perp}$ verschwinden. Unter dieser Identifikation ist dann $Z(E_1)$ isomorph zum Raum der Funktionen $f \in C(X)$ mit $f \cdot 1_A = f$, und dieser wiederum zu $C(A)$.

3. Ist E ordnungsvollständig, so ist dim E = n genau dann wenn dim Z(E) = n (siehe Flösser (1977) 3.3). Daraus folgt, daß E genau dann diffus ist, wenn Z(E) es ist, d.h. wenn X keine isolierten Punkte hat.

Es wird nun ein weiterer Verband regulärer Operatoren beschrieben. Definition 1.16 und Satz 1.17 stammen von U.Schlotterbeck (1974). Dort wird eine andere Version des Satzes gezeigt. Deshalb geben wir einen Beweis an.

1.16 Definition. Sei E ein Banachverband. Mit $E'\tilde{\otimes}_e E$ wird der Abschluß von $E' \otimes E$ in $\mathcal{L}^r(E)$ bezeichnet.

1.17 Satz. <u>Sei</u> E <u>ein</u> (<u>reeller</u> <u>oder</u> <u>komplexer</u>) <u>Banachverband</u> <u>und</u> $T \in E'\tilde{\otimes}_e E$. <u>Es</u> <u>existiert</u> $|T|$ <u>und</u> <u>ist</u> <u>gegeben</u> <u>durch</u> $|T|x = \sup\{|Tz| \mid |z| \leq x\}$ <u>für</u> $x \in E_+$. <u>Ferner</u> <u>ist</u> $|T| \in E'\tilde{\otimes}_e E$.

Beweis. a) Sei $T \in \mathscr{L}(E,C(X))$ ein Operator von endlichem Rang. Dann existiert $|T|x = \sup\{|Tz| \mid |z| \leq x\}$ für alle $x \in E_+$. Es wird so ein Operator $|T| \in \mathscr{L}(E,C(X))$ definiert, der in der Operatornorm durch Operatoren von endlichem Rang approximiert werden kann.
Das sieht man wie im ersten Teil des Beweises von IV 4.6 in Schaefer (1974).

b) Für $T \in E' \otimes E$ gilt die Behauptung.
Sei nämlich $T = \sum_{i=1}^{n} x_i' \otimes x_i$. Setze $u = \sup\{|x_i| \mid i=1..n\}$.
Dann ist $T(E) \subset E_u$. Nach a) existiert also $|T|$ und ist durch $|T|x = \sup\{|Ty| \mid |y| \leq x\}$ für alle $x \in E_+$ gegeben.
Sei $x' = \sup\{|x_i'| \mid i=1...n\}$ und seien $j:E \to (E,x')$ und $i:E_u \to E$ die kanonischen Abbildungen (siehe Schaefer(1974) IV §3). Es ist $T = iT_oj$ für einen Operator $T_o \in (E,x')' \otimes E_u$. Man sieht leicht, daß $|T| = i|T_o|j$. Zu $\varepsilon > o$ gibt es nach a) $S_o \in (E,x')' \otimes E_u$, so daß $\| |T_o| - S_o \|_o < \varepsilon$ ($\| \ \|_o$ bezeichne die Norm in $\mathscr{L}((E,x'),E_u)$).
Daraus folgt für $S = iS_oj$
$|(|T| - S)x| \leq \varepsilon \langle |x|, x' \rangle u$ für alle $x \in E$. Somit ist
$\| S - |T| \|_r \leq \varepsilon x' \otimes u$. Da $S \in E' \otimes E$ ist, folgt
$|T| \in E' \otimes_e E$.

c) Sei $T = \lim_{n \to \infty} T_n$ in $\mathscr{L}^r(E)$, wobei $|T_n|$ existiert und durch $|T_n|x = \sup\{|T_nz| \mid |z| \leq x\}$ für alle $x \in E_+$

gegeben ist ($n \in \mathbb{N}$). Dann existiert $|T|$ und ist durch

$|T|x = \sup \{|Tz| \mid |z| \leq x\}$ für alle $x \in E_+$ gegeben,

ferner ist $|T| = \lim\limits_{n\to\infty} |T_n|$ in $\mathcal{L}^r(E)$.

Man sieht nämlich leicht, daß $(|T_n|)$ eine Cauchy-Folge in $\mathcal{L}(E)$ ist. Sei $S = \lim\limits_{n\to\infty} |T_n|$. Sei $x \in E_+$.

Wegen $|Tz| = \lim\limits_{n\to\infty} |T_n z| \leq \lim\limits_{n\to\infty} |T_n||z| = S|z|$ ist $|Tz| \leq Sx$ für $|z| \leq x$. Sei $w \geq |Tz|$ für alle $z \in E$ mit $|z| \leq x$.

Es gibt $R_n \in \mathcal{L}(E)_+$ ($n \in \mathbb{N}$) mit $|(T_n - T)z| \leq R_n|z|$ für alle $z \in E$, so daß $\lim\limits_{n\to\infty} \|R_n\| = 0$.

Für $|z| \leq x$ gilt

$|T_n z| \leq |(T_n - T)z| + |Tz| \leq R_n|z| + w \leq R_n x + w$, woraus

$|T_n|x \leq R_n x + w$ ($n \in \mathbb{N}$) und damit

$Sx = \lim\limits_{n\to\infty} |T_n|x \leq w$ folgt.

d) Sei $T \in E'\tilde{\otimes}_e E$ beliebig. Es existiert eine Folge (T_n) in $E'\otimes E$, so daß $\lim\limits_{n\to\infty} T_n = T$ in $\mathcal{L}^r(E)$. Nach c) existiert

$|T| = \lim\limits_{n\to\infty} |T_n|$ und nach b) und c) ist

$|T|x = \sup \{|Tz| \mid |z| \leq x\}$ für alle $x \in E_+$.

Da nach b) $|T_n| \in E'\tilde{\otimes}_e E$ ($n \in \mathbb{N}$) gilt auch

$|T| \in E'\tilde{\otimes}_e E$. Damit ist der Beweis beendet.

1.18 Beispiel. Sei E ein reeller Banachverband.

$E'\tilde{\otimes}_e E$ ist eine reelle Banachverbandsalgebra unter der von $\mathcal{L}^r(E)$ induzierten Multiplikation, Ordnung und Norm.

In dem folgenden Sinn ist $E'\tilde{\otimes}_e E$ ein Unterverband von $\mathcal{L}^r(E)$: Für $S,T \in E'\tilde{\otimes}_e E$ existiert $\sup\{S,T\}$ in $\mathcal{L}^r(E)$ und es ist $\sup\{S,T\} \in E'\tilde{\otimes}_e E$. Ist E ein komplexer Banachverband, so ist $E'\tilde{\otimes}_e E$ eine komplexe Banachverbandsalgebra, und zwar die Komplexifizierung von $E'_{\mathbb{R}} \tilde{\otimes}_e E_{\mathbb{R}}$.

Wir benötigen die folgenden Eigenschaften spezieller Multiplikationsabbildungen auf $\mathcal{L}^r(E)$.

1.19 Satz. <u>Sei</u> E <u>ein ordnungsvollständiger Banachverband und</u> U <u>ein positiver Operator auf</u> E. <u>Bezeichne</u> L_U <u>und</u> R_U <u>die Operatoren auf</u> $\mathcal{L}^r(E)$, <u>die durch</u> $L_U(T) = UT$ <u>und</u> $R_U(T) = TU$ <u>für alle</u> $T \in \mathcal{L}^r(E)$ <u>definiert sind. Es gilt</u>:

1. <u>Ist</u> U <u>ein Verbandshomomorphismus, so ist</u> R_U <u>intervallerhaltend</u>.

2. <u>Ist</u> U <u>fast intervallerhaltend, so ist</u> R_U <u>ein Verbandshomomorphimus</u>.

3. <u>Ist</u> U <u>ein Verbandsisomorphismus, so sind</u> R_U <u>und</u> L_U <u>Verbandsisomorphimen</u>.

Beweis. Man kann offensichtlich annehmen, daß E reell ist.

1. Sei U ein Verbandshomomorphismus. Sei $T \in \mathscr{L}(E)_+$, $S \in \mathscr{L}(E)$ mit $o \leq S \leq TU$. Es ist zu zeigen, daß ein Operator $S_1 \in \mathscr{L}(E)$ existiert mit $o \leq S_1 \leq T$, so daß $S_1U = S$.

Sei $F = UE$. F ist ein Unterverband von E. Definiere $S_o : F \to E$ durch $S_oUx = Sx$ für $x \in E$.

a) S_o ist wohldefiniert: Sei $Ux = o$. Dann ist $|Sx| \leq S|x| \leq TU|x| = T|Ux| = o$. Also ist $Sx_1 = Sx_2$, wenn $Ux_1 = Ux_2$.

b) S_o ist positiv: Sei $Ux \geq o$. Dann ist $Ux = |Ux| = U|x|$. Also ist $S_oUx = S|x| \geq o$.

Sei $p:E \to E$ definiert durch $p(y) = Ty^+$ $(y \in E)$.

c) p ist sublinear: Sei $y_1, y_2 \in E$. Es ist $(y_1 + y_2)^+ \leq y_1^+ + y_2^+$. Somit ist $p(y_1 + y_2) = T(y_1+y_2)^+ \leq T(y_1^+ + y_2^+) = p(y_1) + p(y_2)$. Für $y \in E$, $\lambda \in \mathbb{R}_+$ gilt $p(\lambda y) = T(\lambda y)^+ = \lambda Ty^+ = \lambda p(y)$.

d) Es gilt $S_oz \leq p(z)$ für alle $z \in F$:
Sei $z = Ux$. Dann ist $S_oz = Sx \leq Sx^+ \leq TUx^+ = T(Ux)^+ = Tz^+ = p(z)$.

Nach dem verallgemeinerten Satz von Hahn-Banach (siehe z.B. Day (1973) VI §3 Theorem 1) besitzt S_o eine Fortsetzung S_1 auf E, so daß $S_1x \leq p(x)$ für alle $x \in E$.

S_1 erfüllt die gewünschten Eigenschaften:

a) Es ist $S_1U = S$: Sei $x \in E$. Dann ist $S_1Ux = S_oUx = Sx$.

b) S_1 ist positiv: Sei $x \in E_+$. Dann ist
$-S_1x = S_1(-x) \leq p(-x) = T(-x)^+ = o$. Also ist $S_1x \geq o$.
c) Es gilt $S_1 \leq T$: Sei $x \in E_+$. Dann ist $S_1x \leq p(x) = Tx$.

2. Sei U fast intervallerhaltend. Es reicht zu zeigen, daß $(TU)^+ = T^+U$ für jeden Operator $T \in \mathcal{L}^r(E)$.
Sei $T \in \mathcal{L}^r(E)$, $x \in E_+$. Dann ist

$$\begin{aligned}
(TU)^+x &= \sup TU([o,x]) \\
&= \sup \overline{TU([o,x])} \\
&\geq \sup T(\overline{U([o,x])}) \\
&= \sup T([o,Ux]) \\
&= T^+Ux.
\end{aligned}$$

Somit ist $T^+U \leq (TU)^+$. Es ist klar, daß umgekehrt $(TU)^+ \leq T^+U$ gilt.

3. Ist U ein Verbandsisomorphismus, so ist $R_U \geq o$, und $(R_U)^{-1} = R_U{-1} \geq o$. Somit ist R_U ein Verbandsisomorphimus, genauso L_U.

Im folgenden werden ordnungstheoretische und algebraische Eigenschaften einiger Bänder in $\mathcal{L}^r(E)$ untersucht. Dabei wird E immer als ordnungsvollständig vorausgesetzt. Ein regulärer Operator T auf E heißt ordnungsstetig, wenn gilt: Ist $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ ein $(\geq)$-gerichtetes Netz in E mit $\inf\limits_{\alpha \in A} x_\alpha = o$, so gilt $\inf\limits_{\alpha \in A} |T|x_\alpha = o$.

Die Menge der ordnungsstetigen regulären Operatoren auf E ist ein Band in $\mathcal{L}^r(E)$ (siehe z.B. Luxemburg, Zaanen (1971)). Wir bezeichnen es mit $\mathcal{L}^{os}(E)$.
Mit E'_{os} bezeichnen wir das Band der ordnungsstetigen Linearformen auf E. Identifiziert man E mit einem Unterverband von E'', so ist das von E erzeugte Band in E'' gerade $(E')'_{os}$ (siehe Lotz (1974)). Ist $E = (E')'_{os}$, so heißt E ein KB-Raum (siehe Schaefer (1974) II §5).

1.2o Lemma. <u>Sei</u> E <u>ein</u> <u>KB-Raum</u>. <u>Dann</u> <u>ist</u> <u>die</u> <u>Abbildung</u> $T \to T'$ <u>ein</u> <u>Verbandsisomorphismus</u> <u>von</u> $\mathcal{L}^r(E)$ <u>auf</u> $\mathcal{L}^{os}(E')$.

Beweis. Die Abbildung $T \to T'$ ist injektiv und T ist genau dann positiv, wenn T' positiv ist. Somit reicht es zu zeigen, daß das Bild der Abbildung $\mathcal{L}^{os}(E')$ ist.
Jeder Operator T' ist ordnungsstetig (klar).
Sei $S \in \mathcal{L}^{os}(E')$. Dann ist $S'(E')'_{os} \subset (E')'_{os}$.
Da E ein KB-Raum ist, ist $(E')'_{os} = E$. Sei $T = S'_{|E}$.
Dann ist $T' = S$.

Die Operatoren, die in dem von $E' \otimes E$ in $\mathcal{L}^r(E)$ erzeugten Band liegen, heißen Kernoperatoren (siehe Schaefer (1974))

1.21 Lemma. Sei E ein ordnungsvollständiger Banachverband.
Es gilt $(E'\otimes E)^{\perp\perp} \cap \mathscr{L}^{os}(E) = (E'_{os} \otimes E)^{\perp\perp}$.

Beweis. a) Sei $x' \in E'_{os}$, $x \in E$. Dann ist $x' \otimes x$ ordnungsstetig. Da $\mathscr{L}^{os}(E)$ ein Band ist, ist also
$(E'_{os} \otimes E)^{\perp\perp} \subset (E'\otimes E)^{\perp\perp} \cap \mathscr{L}^{os}(E)$.

b) Sei umgekehrt $T \in (E'\otimes E)^{\perp\perp} \cap \mathscr{L}^{os}(E)$, $T \geq o$.
Dann gibt es ein $(\leq)$-gerichtetes Netz $(T_\alpha)_{\alpha\in A} \subset \mathscr{L}(E)_+$ und Operatoren $R_\alpha \in E'\otimes E$ $(\alpha \in A)$, so daß
$T_\alpha \leq R_\alpha$ $(\alpha\in A)$ und $\sup\limits_{\alpha\in A} T_\alpha = T$.
Sei P die Bandprojektion von $\mathscr{L}^r(E)$ auf $\mathscr{L}^{os}(E)$, und sei p die Bandprojektion von E' auf E'_{os}.
Es gilt für $x' \in E'$, $x \in E$ $\quad P(x' \otimes x) = p(x') \otimes x$.
(Sei nämlich O.B.d.A. $x' \geq o$, $x \geq o$.
Wir benutzen die von Schep (1978) gegebenen Formeln für P und p: Für $y \in E_+$ ist
$\langle y,p(x')\rangle = \inf \{ \sup\limits_\beta \langle y_\beta,x'\rangle \mid y_\beta \uparrow y\}$, und für $T \geq o$
$P(T)y = \inf \{ \sup\limits_\beta Ty_\beta \mid y_\beta \uparrow y\}$.
Somit ist

$$\begin{aligned} P(x' \otimes x)y &= \inf \{ \sup_\beta \langle y_\beta,x'\rangle\, x \mid y_\beta \uparrow y\} \\ &= (\inf \{\sup_\beta \langle y_\beta,x'\rangle \mid y_\beta \uparrow y\})x \\ &= \langle y,p(x')\rangle x = (p(x') \otimes x)y \end{aligned}$$

für alle $y \in E_+$.)
Also ist $P(R_\alpha) \in E'_{os} \otimes E$ $(\alpha\in A)$. Da $T = P(T) = \sup\limits_{\alpha\in A} P(T_\alpha)$ und $P(T_\alpha) \leq P(R_\alpha) \in E'_{os} \otimes E$ $(\alpha\in A)$, ist also
$T \in (E'_{os} \otimes E)^{\perp\perp}$.

1.22 Satz. Sei E ein ordnungsvollständiger Banachverband und $\mathcal{W}$ eine Gruppe von Verbandsisomorphimen auf E. Das von $\mathcal{W}$ erzeugte Band $\mathcal{W}^{\perp\perp}$ in $\mathcal{L}^r(E)$ ist eine volle Unteralgebra von $\mathcal{L}^r(E)$.

Beweis. a) Es gilt $\mathcal{W} \circ \mathcal{W}^{\perp} \subset \mathcal{W}^{\perp}$.

Sei nämlich $V \in \mathcal{W}$ und $T \in \mathcal{W}^{\perp}$. Für $U \in \mathcal{W}$ ist dann $|VT| \wedge U = V(|T| \wedge V^{-1}U) = o$ nach 1.19.3. Da U beliebig war, ist $VT \in \mathcal{W}^{\perp}$.

b) $\mathcal{W}^{\perp\perp}$ ist eine Unteralgebra von $\mathcal{L}^r(E)$.

Sei $R,S \in \mathcal{W}^{\perp\perp}$, $T \in \mathcal{W}^{\perp}_{+}$; $R,S,T \geq o$. Zu zeigen ist $R \circ S \wedge T = o$.

Es gibt ein $(\leq)$-gerichtetes Netz $(R_\alpha)_{\alpha \in A}$ in $\mathcal{L}(E)_+$, so daß für jedes $\alpha \in A$ eine endliche Teilmenge H_α von $\mathcal{W}$ und ein $n_\alpha \in \mathbb{N}$ existiert mit $R_\alpha \leq n_\alpha \sum_{V \in H_\alpha} V$, derart daß $R = \sup\limits_\alpha R_\alpha$.

Da nach a) $VS \wedge T = V(S \wedge V^{-1}T) = o$ für alle $V \in \mathcal{W}$, ist für jedes $\alpha \in A$ $R_\alpha S \wedge T \leq n_\alpha \sum\limits_{V \in H_\alpha} (VS \wedge T) = o$.

Also ist auch $RS \wedge T = (\sup\limits_\alpha R_\alpha S) \wedge T = \sup\limits_\alpha (R_\alpha S \wedge T) = o$.

c) Es gilt $\mathcal{W}^{\perp\perp} \circ \mathcal{W}^{\perp} \subset \mathcal{W}^{\perp}$.

Sei $R \in \mathcal{W}^{\perp\perp}$, $T \in \mathcal{W}^{\perp}$; $R,T \geq o$. Sei $U \in \mathcal{W}$.

Zu zeigen ist $RT \wedge U = o$.

Es ist wie in b) $R = \sup\limits_\alpha R_\alpha$ mit $R_\alpha \leq n_\alpha \sum\limits_{V \in H_\alpha} V$.

Somit ist $RT \wedge U = (\sup\limits_\alpha R_\alpha)T \wedge U = \sup\limits_\alpha (R_\alpha T \wedge U) \leq \sup\limits_\alpha \sum\limits_{V \in H_\alpha} VT \wedge U = o$ nach a).

d) $\mathcal{W}^{\perp\perp}$ ist voll in $\mathcal{L}^r(E)$.

Sei $R \in \mathcal{W}^{\perp\perp}$ invertierbar in $\mathcal{L}^r(E)$. R^{-1} besitzt eine eindeutige Zerlegung $R^{-1} = S_1 + S_2$ mit $S_1 \in \mathcal{W}^{\perp\perp}$, $S_2 \in \mathcal{W}^{\perp}$. Es ist $I = RS_1 + RS_2$. Somit ist $RS_2 = I - RS_1 \in \mathcal{W}^{\perp\perp} \cap \mathcal{W}^{\perp} = \{o\}$ nach b) und c). Also ist $RS_2 = o$ und damit $S_2 = o$, da R invertierbar ist. Es ist also $R^{-1} = S_1 \in \mathcal{W}^{\perp\perp}$.

Sei E ein ordnungsvollständiger Banachverband. Das von der Gruppe aller Verbandsisomorphismen auf E in $\mathcal{L}^r(E)$ erzeugte Band bezeichnen wir mit $\mathcal{L}_a(E)$. Nach 1.22 ist $\mathcal{L}_a(E)$ eine volle Unteralgebra von $\mathcal{L}^r(E)$. Wir werden zeigen, daß $\mathcal{L}_a(E)$ senkrecht zum Band der Kernoperatoren steht, wenn E diffus ist. Zunächst sollen jedoch die kompakten Zentrumsoperatoren charakterisiert werden.

1.23 Satz. Sei E ein Banachverband über $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$). Sei $T \in Z(E)$ ein kompakter Operator. Dann gibt es eine Folge $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von paarweise disjunkten Bandprojektionen auf E und eine Nullfolge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{K}$, so daß $\dim P_nE = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $c_n \neq o$, derart daß

$$T = \sum_{n=1}^{\infty} c_n P_n$$

(die Reihe konvergiert in $Z(E)$ und somit in $\mathcal{L}(E)$).

Beweis. 1. Sei $K = \mathbb{C}$. Wir identifizieren $Z(E)$ mit einem Raum $C(X)$. Dann entspricht T einer Funktion $f \in C(X)$. Es ist $\sigma(T) = \sigma_{C(X)}(f) = f(X)$. Wir wollen annehmen, daß $f(X) \setminus \{o\}$ unendlich ist, sonst vereinfacht sich der Beweis allenfalls. Dann gibt es eine Nullfolge $(d_n)_{n\in N}$ in $\mathbb{C}$ mit $d_n \neq d_m$ für $n \neq m$, so daß
$f(X) \setminus \{o\} = \{d_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.
Setze $X_n = f^{-1}\{d_n\}$ $(n \in \mathbb{N})$. Dann ist $X_n \subset X$ offen-abgeschlossen. Sei $Q_n = 1_{X_n}$, $E_n = Q_nE$ $(n \in \mathbb{N})$. $(Q_n)_{n\in N}$ ist eine Folge von paarweise orthogonalen Bandprojektionen. Da $f = \sum_{n=1}^{\infty} d_n 1_{X_n}$ in $C(X)$, ist $T = \sum_{n=1}^{\infty} d_nQ_n$ in $Z(E)$. Für $x \in E_n$ ist $Tx = d_nx$. Da T kompakt ist, ist also $\dim E_n < \infty$. Nach 1.15.3 ist also Q_n Summe von endlich vielen paarweise orthogonalen Bandprojektionen mit 1-dimensionalem Bild. Daraus folgt die Behauptung.
2. Ist $K = \mathbb{R}$, so ergibt sich die Behauptung aus 1, wenn man E komplexifiziert und T linear auf $E_{\mathbb{C}}$ fortsetzt. Es ist $(c_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$, da T einer reellwertigen Funktion in $C(X) = Z(E_{\mathbb{C}})$ entspricht.

1.24 Korollar. <u>Sei</u> E <u>ein diffuser Banachverband.</u> <u>Der einzige kompakte Operator in</u> $Z(E)$ <u>ist der Nulloperator</u>.

1.25 Satz. <u>Sei</u> E <u>ein</u> <u>Banachverband</u> <u>und</u> T <u>ein</u> <u>positiver</u>, <u>kompakter</u> <u>Operator</u> <u>auf</u> E. <u>Ist</u> $M \in Z(E)$ <u>mit</u> $|M| \leq T$, <u>so</u> <u>ist</u> M <u>kompakt</u>.

Beweis. 1. Sei E ordnungsvollständig.

a) Ist P eine Bandprojektion, so daß $|M| \geq \varepsilon P$ für ein $\varepsilon > o$, dann ist $\dim PE < \infty$.

Wir identifizieren Z(E) mit C(X). Dann ist $P=1_A$ für eine offen-abgeschlossene Teilmenge A von X. Angenommen, PE ist nicht endlich-dimensional. Da $Z(PE) \simeq C(A)$, ist dann C(A) unendlich-dimensional (siehe 1.15) und daher A eine unendliche Menge. Somit gibt es eine Folge $(A_n)_{n\in N}$ von offen-abgeschlossenen Teilmengen von A mit $A_n \cap A_m = \emptyset$ für $n \neq m$. Sei $P_n = 1_{A_n}$ $(n \in \mathbb{N})$. Es gibt Elemente $x_n \in E_+$ mit $||x_n|| = 1$, so daß $P_n x_n = x_n$ $(n \in \mathbb{N})$. Da T kompakt ist, kann man annehmen, daß $\lim\limits_{n\to\infty} Tx_n = y$ für ein $y \in E_+$ (sonst gehe man zu einer Teilfolge über). Es ist $\sum\limits_{n=1}^{\infty} P_n y \leq y$. Daher konvergiert $(P_n y)_{n\in\mathbb{N}}$ schwach gegen o. Da T kompakt ist, ist $\lim\limits_{n\to\infty} TP_n y = o$ in der Norm. Es gilt folgende Abschätzung:

$$\begin{aligned} ||x_n|| = ||P_n P x_n|| &\leq \varepsilon^{-1} ||P_n T x_n|| \\ &\leq \varepsilon^{-1} ||P_n T x_n - P_n y|| + \varepsilon^{-1} ||P_n y|| \\ &\leq \varepsilon^{-1} ||Tx_n - y|| + \varepsilon^{-1} ||PP_n y|| \\ &\leq (\varepsilon^{-1} ||Tx_n - y|| + \varepsilon^{-2} ||TP_n y||) \quad \to \quad o \ (n\to\infty). \end{aligned}$$

Das ist ein Widerspruch!

b) M ist kompakt. Sei nämlich $M = f \in C(X)$ bzgl. der Identifizierung von $C(X)$ mit $Z(E)$.

Setze $A_n = \overline{\{s \in X \mid |f_n(s)| > 1/n\}}$ $(n \in \mathbb{N})$.

Die Mengen A_n sind offen-abgeschlossen in X.

Sei $P_n = 1_{A_n}$ $(n \in \mathbb{N})$. Dann ist

$|M - MP_n| \leq |M|\,|I - P_n| \leq 1/n\, I$. Somit ist

$M = \lim_{n\to\infty} MP_n$ in $\mathcal{L}(E)$. Daraus folgt die Behauptung, da nach a) die Operatoreren MP_n $(n \in \mathbb{N})$ endlichen Rang haben.

2. Sei E beliebig. Aus $|M| \leq T$ folgt $|M'| \leq T'$.

Da T' kompakt ist, ist M' kompakt nach 1. Also ist auch M kompakt.

Bemerkung: Die Argumentation in Teil 1a) des Beweises von 1.25 stammt aus Ando (1977), wo gezeigt wird, daß $I \wedge T = o$ ist, wenn T ein positiver, kompakter Operator auf einem diffusen AL-Raum ist.

1.26 Korollar. <u>Sei</u> E <u>ein diffuser</u>, <u>ordnungsvollständiger Banachverband</u>, T <u>ein positiver</u>, <u>kompakter Operator auf</u> E <u>und</u> V <u>ein Verbandsisomorphimus</u>.

<u>Es gilt</u> $T \wedge V = o$.

Beweis. a) Es gilt $T \wedge I = o$.

Sei nämlich $S \leq T, I$. Dann ist S^+ kompakt nach 1.25.

Nach 1.24 ist somit $S^+ = o$, d.h. es ist $S \leq o$.

b) Sei V ein Verbandsisomorphismus. Dann ist nach 1.17 $T \wedge V = (TV^{-1} \wedge I)V$. Da TV^{-1} kompakt ist, gilt $TV^{-1} \wedge I = o$ nach a). Also ist $T \wedge V = o$.

Sei E ein ordnungsvollständiger diffuser Banachverband. Bezeichnet man mit $\mathcal{L}_s(E)$ das Band $\mathcal{L}_s(E) = (E' \otimes E \;\cup \mathcal{L}_a(E))^{\perp}$, so erhält man die folgende Bandzerlegung von $\mathcal{L}^r(E)$:

$$\mathcal{L}^r(E) = (E' \otimes E)^{\perp\perp} \oplus \mathcal{L}_s(E) \oplus \mathcal{L}_a(E).$$

Es gelten folgende algebraischen Beziehungen zwischen den Bändern:

1. $\mathcal{L}^{\infty}(E) \circ (E' \otimes E)^{\perp\perp} \subset (E' \otimes E)^{\perp\perp}$
2. $(E' \otimes E)^{\perp\perp} \circ \mathcal{L}^r(E) \subset (E' \otimes E)^{\perp\perp}$
3. $\mathcal{L}_a(E) \circ \mathcal{L}_a(E) \subset \mathcal{L}_a(E)$
4. $\mathcal{L}_a(E) \circ \mathcal{L}_s(E) \subset \mathcal{L}_s(E)$

(Die Beziehungen 1. und 2. sind leicht nachzuprüfen. 3. folgt aus 1.22, und 4. läßt sich mit Hilfe von Beweisteil c) von 1.22 zeigen.)

In Kapitel 2 wird gezeigt, daß $\mathcal{L}_s(E)$ i.a. keine Unteralgebra von $\mathcal{L}^r(E)$ ist.

2. Faltungsoperatoren

In diesem Kapitel werden die Faltungsoperatoren ordnungstheoretisch untersucht. Dabei handelt es sich um reguläre Operatoren T_μ auf $L^p(G)$ (G eine lokal kompakte Gruppe), die durch $T_\mu f = \mu * f$ für $f \in L^p(G)$ definiert sind ($\mu \in M(G)$).

Es stellt sich folgende Frage: Kann man dem Operator T_μ ansehen, ob μ absolut-stetig, singulär, diffus oder atomar ist? Eine Antwort gibt der Hauptsatz (2.12) dieses Kapitels, der besagt, daß der Zerlegung von T_μ bzgl. der Bandzerlegung $\mathcal{L}^r(E) = (E' \otimes E)^{\perp\perp} \oplus \mathcal{L}_s(E) \oplus \mathcal{L}_a(E)$ ($E = L^p(G)$, G nicht diskret) aus Kapitel 1 gerade die Zerlegung von μ in absolut-stetigen, singulär diffusen und atomaren Anteil entspricht.

Durch die Wahl spezieller Maße erhält man Beispiele von Operatoren mit interessanten Eigenschaften. So wird z.B. ein kompakter, positiver Operator T auf $E = L^2(G)$ angegeben, der in $\mathcal{L}_s(E)$ liegt. Insbesondere läßt sich T nicht durch Operatoren R von endlichem Rang mit $o \leq R \leq T$ in der Operatornorm approximieren, obwohl E die positive Approximationseigenschaft (Schlotterbeck (1974)) besitzt. Speziell auf kompakte Gruppen G angewandt liefert der Hauptsatz eine Verallgemeinerung der von Akemann (1967)

gegebenen Charakterisierung der kompakten Operatoren T_μ auf $L^1(G)$.
Um eine einfache Darstellung zu ermöglichen, wird generell die Voraussetzung gemacht, daß G amenabel ist. Dann nämlich ist $M^b(G)$ über die Abbildung $\mu \to T_\mu$ isomorph zum Raum derjenigen regulären Operatoren auf $L^p(G)$, die mit allen Translationen kommutieren (Satz 2.3). Diese Isomorphie wird in Kapitel 3 grundlegend für Anwendungen auf die Spektraltheorie sein. Hier allerdings bringt die Voraussetzung der Amenabilität lediglich technische Vereinfachungen.

Sei G eine lokal-kompakte Gruppe. Ist $\mu \in M^b(G)$ und $f \in L^p(G)$ $(1 \leq p \leq \infty)$, so wird durch

$$\mu * f\ (s) = \int f(t^{-1}s)\, d\mu(t) \qquad (s \in G)$$

ein Element $\mu * f$ von $L^p(G)$ definiert. Es gilt

$$||\mu * f||_p \leq ||\mu||\ ||f||_p$$

(siehe Hewitt-Ross (1963) V 2o.12). Somit definiert jedes $\mu \in M^b(G)$ einen Operator $T_{\mu,p}$ auf $L^p(G)$ durch

$$T_{\mu,p} f = \mu * f \qquad (f \in L^p(G)).$$

Die Operatoren $T_{\mu,p}$, $\mu \in M^b(G)$, wollen wir Faltungsoperatoren nennen. Ist p fest, so schreiben wir auch T_μ statt $T_{\mu,p}$ wenn kein Mißverständnis auftreten kann.

Offensichtlich ist $T_{\mu,p}$ positiv, wenn μ positiv ist. Da sich jedes beschränkte Maß auf G als Linearkombination von positiven beschränkten Maßen schreiben läßt, sind die Faltungsoperatoren regulär.
Man kann leicht sehen, daß für $\mu \in M^b(G)$ gilt

$$(T_{\mu,p})' = T_{\check{\mu},q} \qquad (1/p + 1/q = 1)$$
$$(T_{\mu,2})^* = T_{\mu^*,2}$$

Jedes Element a von G definiert auf $L^p(G)$ $(1 \leq p \leq \infty)$ einen Translationsoperator R_a durch $R_a f(s) = f(sa)$ $(a \in G)$ für alle $f \in L^p(G)$. Die Faltungsoperatoren vertauschen mit den Operatoren R_a $(a \in G)$. Sei nämlich $\mu \in M^b(G)$, $a \in G$. Dann gilt für $f \in L^p(G)$, $s \in G$

$$R_a T_\mu f(s) = T_\mu f(sa) = \mu * f(sa) := \int f(t^{-1}sa)d\mu(t)$$
$$= (\mu * R_a f)(s) = (T_\mu R_a f)(s).$$

Diese Eigenschaft charakterisiert die Faltungsoperatoren unter den positiven linearen Abbildungen für $1 \leq p < \infty$, falls die Gruppe G amenabel ist. Das ergibt sich aus den folgenden beiden Sätzen.

2.1 Satz (siehe Brainerd-Edwards (1966)).
<u>Sei</u> T <u>ein positiver Operator auf</u> $L^p(G)$ $(1 \leq p \leq \infty)$, <u>so daß</u> $R_a T = T R_a$ <u>für alle</u> $a \in G$ <u>gilt</u>.
<u>Dann gibt es ein positives Maß</u> μ <u>auf</u> G, <u>so daß</u> $Tf = \mu * f$ <u>für alle</u> $f \in C_c(G)$.

Man sieht leicht, daß für jedes Maß $\mu \in M^b(G)_+$ $||T_{\mu,p}|| = ||\mu||$ für $p=1,\infty$ ist. Für $1 < p < \infty$ gilt der folgende Satz (siehe Gilbert (1968) und Reiter (1968) ch.8).

2.2 Satz. <u>Für jedes</u> p, $1 < p < \infty$, <u>sind die folgenden Bedingungen äquivalent</u>:

(i) G <u>ist amenabel</u>

(ii) <u>Es ist</u> $||T_{\mu,p}|| = ||\mu||$ <u>für jedes</u> $\mu \in M^b(G)_+$

(iii) <u>Ist</u> $\mu \in M(G)_+$, <u>so daß</u> $\mu * f \in L^p(G)$ <u>für alle</u> $f \in C_c(G)$ <u>und</u> $||\mu * f||_p \leq c||f||_p$ ($c \in \mathbb{R}_+$ <u>fest</u>), <u>so ist</u> μ <u>beschränkt</u>.

Jede kompakte und jede lokal-kompakte abelsche Gruppe ist amenabel. Für kompakte Gruppen folgt das trivialerweise aus (iii). Ist G abelsch, so kann man das aus (ii) für $p=2$ folgendermaßen sehen:
Sei $\mathcal{F}$: $L^2(G) \to L^2(\hat{G})$ die Fourier-Plancherel-Transformation. Der zu $T_{\mu,2}$ konjugierte Operator $S = \mathcal{F}\, T_{\mu,2}\, \mathcal{F}^{-1}$ auf $L^2(\hat{G})$ hat die Form $Sg = \hat{\mu}g$ für alle $g \in L^2(\hat{G})$. Somit ist $||T_{\mu,2}|| = ||S|| = ||\hat{\mu}||_\infty = ||\mu||$, da $\mu \geq 0$.

Was weitere Beispiele und die eigentliche Definition von "amenabel" anbetrifft, sei auf die Bücher von

H. Reiter (1968) und F.P. Greenleaf (1969) verwiesen. Hier wird der Begriff "amenabel" im Sinne von 2.2 (i) und (ii) verwandt.

Um die Faltungsoperatoren unter den regulären Operatoren zu charakterisieren, definieren wir die folgenden Räume.

$$F^p = \{ T \in \mathcal{L}^r(L^p(G)) \mid R_a T = TR_a \text{ für alle } a \in G\}, \quad (1 \leq p < \infty)$$

$$F^\infty = \{ T \in \mathcal{L}^r(L^\infty(G)) \mid R_a T = TR_a \text{ für alle } a \in G, \; T \text{ ordnungsstetig}\}$$

2.3 Satz. Sei $1 \leq p \leq \infty$. Der Raum F^p ist ein abgeschlossener Unterverband und eine volle Unteralgebra von $\mathcal{L}^r(L^p(G))$. Somit ist F^p bzgl. der von $\mathcal{L}^r(L^p(G))$ induzierten Struktur eine Banachverbandsalgebra. Ist G amenabel, so ist die Abbildung

$$\tau: M^b(G) \to F^p \quad (\mu \to T_{\mu,p})$$

ein isometrischer Isomorphismus von Banachverbandsalgebren.

Beweis. 1. Es ist unmittelbar klar, daß F^p eine abgeschlossene Unteralgebra von $\mathcal{L}^r(L^p(G))$ ist.

2. F^p ist ein Unterverband. Sei nämlich $T \in F^p$.
Da R_a $(a \in G)$ ein reeller Operator ist, gilt
$R_a(\mathrm{Re}T) = \mathrm{Re}(R_aT) = \mathrm{Re}(TR_a) = (\mathrm{Re}T)R_a$. Somit ist
$\mathrm{Re}T \in F^p$, genauso $\mathrm{Im}T$.
Da R_a $(a \in G)$ ein Verbandsisomorphismus ist, gilt
$R_a|T| = |R_aT| = |TR_a| = |T|R_a$ nach 1.19.
Also ist $|T| \in F^p$.

3. Es gilt $\langle f,\mu\rangle = \mu * \check{f}(e)$ für $f \in C_c(G)$, und $\mu * \check{f}$ ist stetig. Deshalb ist τ injektiv, und es gilt
$T_{\mu,p} \geq 0$ genau dann, wenn $\mu \geq 0$ ist.

4. τ ist surjektiv. Für $1 \leq p < \infty$ folgt das aus 2.1 und 2.2. Sei $T \in F^\infty$. Da T ordnungsstetig ist, gibt es
$S \in \mathcal{L}^r(L^1(G))$, so daß $S' = T$ (1.2o).
Da $(R_aS)' = S'(R_a)' = T\,\Delta(a^{-1})R_{a^{-1}} = \Delta(a^{-1})R_{a^{-1}}T = (SR_a)'$
(Δ bezeichne die Modularfunktion von G), ist $R_aS = SR_a$
für alle $a \in G$, d.h. es ist $S \in F^1$. Daher gibt es
$\mu \in M^b(G)$, so daß $S = T_{\mu,1}$. Dann aber ist $T = S' = T_{\check{\mu},\infty}$.

Aus 2., 3. und 4. folgt, daß τ ein Verbandsisomorphismus ist.

5. Die Isometrie von τ folgt aus 2.2. Es ist nämlich
$||T_{\mu,p}||_r = |||T_{\mu,p}||| = ||T_{|\mu|,p}|| = ||\mu||$.

6. F^p ist voll in $\mathcal{L}^r(L^p(G))$. Sei $T \in F^p$ invertierbar in $\mathcal{L}^r(L^p(G))$. Es ist $R_aT^{-1} = T^{-1}TR_aT^{-1} = T^{-1}R_aTT^{-1} = T^{-1}R_a$
$(a \in G)$. Also ist $T^{-1} \in F^p$ (Benutze 1.2o für $p=\infty$).

Bemerkungen. 1. Für $p=1,\infty$ ist τ ein isometrischer Isomorphismus für jede lokal kompakte Gruppe.

2. Sei $\tilde{F}^p = \{T \in \mathscr{L}(L^p(G)) \mid R_a T = T R_a$ für alle $a \in G\}$.
Es ist $\tilde{F}^1 = F^1$, jedoch ist i.a. $\tilde{F}^p \neq F^p$.

Beispiel. Sei $G = \mathbb{Z}$. Man sieht leicht, daß $T \in \mathscr{L}(l^2(\mathbb{Z}))$ genau dann in $\tilde{F}^2$ liegt, wenn für die Matrixdarstellung (t_{nm}) von T gilt: $t_{n+p,m+p} = t_{nm}$ für alle $n,m,p \in \mathbb{Z}$.
Sei $b_n = t_{n,o}$ $(n \in \mathbb{Z})$, dann ist $b = (b_n) \in l^2(\mathbb{Z})$, und es gilt für $x \in l^2(\mathbb{Z})$ $Tx = b * x$. Sei $\mathscr{F}: L^2(\Gamma) \to l^2(\mathbb{Z})$ die Fourier-Plancherel-Transformation (Γ ist die Kreisgruppe). Der zu T konjugierte Operator $S = \mathscr{F}^{-1} T \mathscr{F}$ ist durch $Sf = f \cdot (\mathscr{F}^{-1} b)$ für $f \in L^2(\Gamma)$ gegeben. Daher ist $\mathscr{F}^{-1} b \in L^\infty(\Gamma)$.
Umgekehrt definiert jedes $b \in l^2(\mathbb{Z})$ mit $\mathscr{F}^{-1} b \in L^\infty(\Gamma)$ einen Operator $T_b \in \tilde{F}^2$ durch $T_b x = b * x$ für $x \in l^2(\mathbb{Z})$.
Somit ist $\tilde{F}^2 = \{T_b \mid b \in l^2(Z),\ \mathscr{F}^{-1} b \in L^\infty(\Gamma)\}$.
Nach 2.1 ist T_b genau dann regulär, wenn $b \in l^1(\mathbb{Z})$ ist.
Es ist also $F^2 = \{T_b \mid b \in l^1(\mathbb{Z})\}$ eine echte Unteralgebra von $\tilde{F}^2$.

Die folgenden Sätze gelten für jede lokal kompakte Gruppe. Ist die Gruppe nicht amenabel, so gibt es auch unbeschränkte positive Maße μ, die einen Operator $f \to \mu * f$ auf $L^p(G)$ $(1 < p < \infty)$ definieren. Um die Darstellung zu vereinfachen, wollen wir jedoch nur beschränkte Maße betrachten.
Daher setzen wir von nun an voraus, daß G eine lokal kompakte amenable Gruppe ist.

Es soll nun die Frage geklärt werden, welche Faltungsoperatoren Kernoperatoren sind. Sei $\mu \in M^b(G)$ absolut stetig bzgl. des Haarmaßes m. Dann gibt es ein $h \in L^1(G)$, so daß $\mu = hm$. Für $f \in L^p(G)$ ist dann

$\mu * f\ (s) = \int f(t^{-1}s)\ h(t)\ dt = \int f(t)\ h(st^{-1})\ \Delta(t^{-1})\ dt$

für fast alle $s \in G$. Nach Schaefer (1974) IV 9.8 ist also $T_{\mu,p}$ ein Kernoperator auf $L^p(G)$ $(1 \leq p \leq \infty)$ mit dem Kern $k(s,t) = h(st^{-1})\Delta(t^{-1})$ $(s,t \in G)$.

2.4 Satz. Sei $E = L^p(G)$ $(1 \leq p \leq \infty)$, $\mu \in M^b(G)$.
μ ist genau dann singulär zum Haarmaß, wenn $T_{\mu,p} \in (E' \otimes E)^{\perp}$ ist.

Beweis. Sei $T_\mu \in (E' \otimes E)^{\perp}$. μ besitzt eine eindeutige Zerlegung $\mu = \mu_1 + \mu_2$, wobei $\mu_1 \in m^{\perp\perp}$ und $\mu_2 \in m^{\perp}$ ist. Nach obiger Bemerkung ist $T_{\mu_1} \in (E' \otimes E)^{\perp\perp}$. Da $|T_{\mu_1}| \leq T_{|\mu|}$, ist $T_{\mu_1} = o$, also auch $\mu_1 = o$.

Sei umgekehrt μ singulär zu m.

a) $p \neq \infty$. Da $|T_\mu| = T_{|\mu|}$ ist, können wir annehmen, daß μ positiv ist. Man muß zeigen, daß

$|T| \wedge T_\mu = o$ für alle $T \in E' \otimes E$ ist.

1. Es reicht zu zeigen, daß $T \wedge T_\mu = o$ ist, für $T = f \otimes g$ mit $f,g \in C_c(G)_+$.

Denn sei $T = \sum_{i=1}^{n} f_i \otimes g_i \in E' \otimes E$. Dann ist

$|T| \leq \sum_{i=1}^{n} |f_i| \otimes \sup_i |g_i| = f \otimes g$ mit $f \in L^q(G)_+$, $g \in L^p(G)_+$.

Es gibt Folgen (f_n) und (g_n) in $C_c(G)_+$, so daß

$\lim_{n\to\infty} f_n = f$ in $L^p(G)$ und $\lim_{n\to\infty} g_n = g$ in $L^q(G)$.

Da für $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$||f \otimes g - f_n \otimes g_n||_r \leq ||f \otimes g - f_n \otimes g||_r + ||f_n \otimes g - f_n \otimes g_n||_r \leq |||f - f_n| \otimes g|| + ||f \otimes |g - g_n||| = ||f - f_n||_q \, ||g||_p + ||f_n||_p \, ||g - g_n||_q$,

ist $f \otimes g = \lim_{n\to\infty} f_n \otimes g_n$ in $\mathcal{L}^r(E)$. Aus $T_\mu \wedge f_n \otimes g_n = o$ folgt also $T_\mu \wedge |T| \leq T_\mu \wedge f \otimes g = o$.

2. Seien $f,g \in C_c(G)_+$. Da $C_c(G)$ dicht in $L^p(G)$ liegt, reicht es zu zeigen, daß $(T_\mu \wedge f \otimes g)h = o$ für alle $h \in C_c(G)_+$ ist. Für $h \in C_c(G)_+$ ist $(T_\mu \wedge f \otimes g)h = \inf H$ mit $H = \{\mu * u + \langle v,f\rangle g \mid u,v \in L^p(G)_+,\ u + v = h\}$. Sei $H_o = \{\mu * u + \langle v,f\rangle g \mid u,v \in C_c(G)_+,\ u + v = h\}$. Da $H_o \subset H$ ist, reicht es zu zeigen, daß $\inf H_o = o$ in $L^p(G)$ ist.

3. Es gilt $\inf H_o(s) = o$ in $\mathbb{R}_+$ für alle $s \in G$.
Sei nämlich $s \in G$. Für $u \in C_c(G)$ sei $Lu(t) = u(t^{-1}s)$ für $t \in G$. L ist ein Verbandsisomorphismus auf $C_c(G)$. Sei $k(t) = f(t^{-1}s)\, g(s)$ $(t \in G)$. Nach Voraussetzung ist $\mu \wedge km = o$. Also ist

$$\begin{aligned}
o &= (\mu \wedge km)Lh = \inf\{\textstyle\int u'(t)\,d\mu(t) + \int v'(t)k(t)dt \mid u',\ v' \in C_c(G)_+,\ u' + v' = Lh\} \\
&= \inf\{\textstyle\int Lu(t)\,d\mu(t) + \int Lv(t)k(t)dt \mid Lu,\ Lv \in C_c(G)_+,\ Lu + Lv = Lh\} \\
&= \inf\{\textstyle\int u(t^{-1}s)d\mu(t) + \int v(t^{-1}s)f(t^{-1}s)dt\ g(s) \mid u,v \in C_c(G)_+,\ u + v = h\} \\
&= \inf\{\mu * u(s) + \textstyle\int v(t)f(t)dt\ g(s) \mid u,v \in C_c(G)_+,\ u+v = h\} \\
&= \inf H_o(s).
\end{aligned}$$

4. Sei H_1 die Menge der endlichen Infima von Elementen in H_o. Dann ist H_1 eine $(\leq)$ - gerichtete Teilmenge von

$C(G)$, und es gilt $\inf H_1(s) = o$ für alle $s \in G$ nach 3. Nach dem Satz von Dini ist die Konvergenz gleichmäßig auf jeder kompakten Teilmenge K von G. Ist also $k \leq H_o$ in $L^p(G)$, so ist auch $k \leq H_1$ in $L^p(G)$, also $k_{|K} \leq o$ in $L^p(G)$. Da $K \subset G$ eine beliebige kompakte Teilmenge war, ist also $k \leq o$. Damit ist die Behauptung für $p \neq \infty$ beweiesen.

b) $p = \infty$. Nach a) gilt $T_{\check{\mu},1} \perp K$ für alle $K \in L^\infty(G) \otimes L^1(G)$. Somit gilt $(T_{\check{\mu},1})' \perp K'$ für alle $K \in L^\infty(G) \otimes L^1(G)$ nach 1.2o. Also ist $T_{\mu,\infty} \in (L^1(G) \otimes L^\infty(G))^\perp$. Da $T_{\mu,\infty}$ ordnungsstetig ist, gilt $T_{\mu,\infty} \in (E'_s \otimes L^\infty(G))^\perp$, wobei E'_s das zu $E'_{os} = L^1(G)$ othogonale Band in $L^\infty(G)$ bezeichnet. Wegen $E' = E'_{os} \oplus E'_s$ ist also $T_{\mu,\infty} \in (E' \otimes E)^\perp$. Damit ist alles gezeigt.

2.5 Korollar. <u>Sei</u> $E = L^p(G)$ $(1 \leq p \leq \infty)$, $\mu \in M^b(G)$.

<u>Äquivalent</u> <u>sind</u>:

(i) $T_\mu \in (E' \otimes E)^{\perp\perp}$

(ii) μ <u>ist</u> <u>absolut</u> <u>stetig</u>

Beweis. (ii) ==> (i) wurde in der Bemerkung vor 2.4 gezeigt.

(i) ==> (i) μ besitzt eine eindeutige Zerlegung $\mu = \mu_1 + \mu_2$, wobei μ_1 absolut stetig und μ_2 singulär ist. Nach 2.4 ist $T_{\mu_2} \in (E' \otimes E)^\perp$. Da $|T_{\mu_2}| \leq |T_\mu|$, folgt $T_{\mu_2} = o$, also $\mu_2 = o$.

Ist $\mu = \delta_t$ $(t \in G)$ ein Dirac-Maß, so ist T_μ ein Verbandsisomorphismus auf $E = L^p(G)$ $(1 \leq p \leq \infty)$. Für $g \in L^p(G)$ ist nämlich $\delta_t * g\,(s) = g(t^{-1}s)$ $(s \in G)$.
Ist μ atomar, so gibt es $(c_t) \in l^1(G)$, so daß $\mu = \sum_{t \in G} c_t\, \delta_t$. Damit ist $T_\mu = \sum_{t \in G} c_t\, T_{\delta_t} \in \mathcal{L}_a(E)$.
Es stellt sich die Frage, ob es noch andere Maße μ gibt, so daß T_μ ein Verbandsisomorphismus (oder -homomorphismus) ist, bzw. T_μ in $\mathcal{L}_a(E)$ liegt. Wir benötigen zwei Hilfssätze:

2.6 <u>Sei</u> X <u>lokalkompakt</u>, $K \subset X$ <u>kompakt</u>. $C(X,K)$ <u>sei der Raum der stetigen Funktionen auf</u> X, <u>deren Träger in</u> K <u>liegt</u>. <u>Ist</u> $\mu: C(X,K) \to \mathbb{C}$ <u>ein Verbandshomomorphismus, so gibt es ein</u> $t \in K$ <u>und ein</u> $c \in \mathbb{R}_+$, <u>so daß</u> $\langle f,\mu\rangle = c\, f(t)$ <u>für alle</u> $f \in C(X,K)$.

Beweis. 1. Sei I ein Ideal in einem Vektorverband E und $\mu: I \to \mathbb{R}$ ein Verbandshomomorphismus. Dann ist die minimale positive Fortsetzung $\tilde{\mu}$ von μ auf E auch ein Verbandshomomorphismus.
Für $x \in E_+$ ist nämlich $\tilde{\mu}(x) = \sup \mu([o,x] \cap I)$. Ist $x \wedge y = o$, so ist $\mu(a) \wedge \mu(b) = o$ für alle $a \in [o,x] \cap I$, $b \in [o,y] \cap I$. Daher ist $\tilde{\mu}(x) \wedge \tilde{\mu}(y) = o$. Die Behauptung folgt aus Schaefer (1974) II 4.4.
2. $C(X,K)$ läßt sich identifizieren mit dem Ideal in $C(K)$ derjenigen stetigen Funktionen auf K, die auf δK verschwinden. Sei $\tilde{\mu}$ die minimale positive Fortsetzung von μ

auf $C(K)$. Nach 2. ist $\tilde{\mu}$ ein Verbandshomomorphismus auf $C(K)$. Daher gibt es $t \in K$ und $c \in \mathbb{R}_+$, so daß $\langle f,\tilde{\mu}\rangle = c\, f(t)$ für alle $f \in C(K)$. Daraus folgt die Behauptung.

2.7 Sei X lokal kompakt, $\mu : C_c(X) \to \mathbb{C}$ ein Verbandshomomorphismus. Dann gibt es $t \in X$, $c \in \mathbb{R}_+$, so daß $\mu = c\, \delta_t$.

Der Beweis ergibt sich unmittelbar aus 2.6, da $C_c(X)$ die Vereinigung der $C(X,K)$, $K \subset X$ kompakt, ist.

2.8 Satz. Sei $\mu \in M^b(G)$, $1 \leq p \leq \infty$. Ist T_μ ein Verbandshomomorphismus auf $L^p(G)$, so ist $\mu = c \cdot \delta_t$ für ein $t \in G$ und $c \in \mathbb{R}_+$.

Beweis. Für $f \in C_c(G)$ gilt $|\langle f,\mu\rangle| = |\mu * \check{f}\,(e)| = |T_\mu \check{f}\,(e)| = |T_\mu \check{f}|(e) = T_\mu |\check{f}|(e) = \langle |f|,\mu\rangle$. Also ist μ ein Verbandshomomorphismus auf $C_c(G)$ und die Behauptung folgt aus 2.7.

2.9 Sei E ein ordnungsvollständiger Banachverband. Zu $x, x_1 \in E$, $0 \leq x_1 \leq x$, gibt es genau einen Operator $M \in Z(E)$, so daß $Mx = x_1$ und $My = y$ für $y \perp x$. Es gilt $0 \leq M \leq I$.

Beweis. Es gibt einen kompakten Raum X, so das $E_x \cong C(X)$. Dabei entspricht x der Funktion 1_X und x_1 einer Funktion h, $o \leq h \leq 1_X$. Definiere $N \in Z(C(X))$ durch $Nf = h \cdot f$ für alle $f \in C(X)$. Jedes $z \in E_+$ besitzt eine eindeutige Zerlegung $z = z_1 + z_2$ mit $z_1 \in x^{\perp\perp}$ und $z_2 \wedge x = o$. Dabei ist $z_1 = \sup\limits_{n \in \mathbb{N}} z \wedge nx$. Definiere M auf E_+ durch $Mz = \sup\limits_{n \in \mathbb{N}} N(z \wedge nx) + z_2$. Die lineare Fortsetzung von M auf E erfüllt die gewünschten Eigenschaften.

Eindeutigkeit. Seien $M_i \in Z(E)$ $(i=1,2)$ Operatoren mit den geforderten Bedingungen. Es ist $N_i = M_{i|E_x} \in Z(E_x)$ $(i=1,2)$. Da $N_1 1_X = N_2 1_X$, ist $N_1 = N_2$. Da M_i ordnungsstetig ist $(i=1,2)$, ist $M_1 y = M_2 y$ für alle $y \in x^{\perp\perp}$ und daher $M_1 = M_2$.

2.1o <u>Sei</u> E <u>ein</u> <u>ordnungsvollständiger</u> <u>Banachverband</u>, $x \in E$ <u>und</u> (x_n) <u>eine</u> <u>Folge</u> <u>in</u> E <u>mit</u> $o \leq x_n \leq x_{n+1} \leq x$ <u>für</u> <u>alle</u> $n \in \mathbb{N}$, <u>so</u> <u>daß</u> $x = \sup\limits_{n \in \mathbb{N}} x_n$. <u>Sei</u> M_n <u>der</u> <u>nach</u> 2.9 <u>existierende</u> <u>Operator</u> <u>in</u> Z(E) <u>mit</u> $M_n x = x_n$ $(n \in \mathbb{N})$; $M_n y = y$ <u>für</u> $y \in x^{\perp}$. <u>Dann</u> <u>gilt</u>

$$M_n \leq M_{n+1} \quad (n \in \mathbb{N}), \quad \sup M_n = I.$$

Beweis. Es gilt $M_n \leq M_{n+1}$ $(n \in \mathbb{N})$ nach Konstruktion. Sei $M = \sup M_n$. Dann ist $Mx = \sup M_n x = \sup x_n = x$ und $My = y$ für alle $y \in x^{\perp}$. Da M außerdem im Zentrum von E liegt, folgt aus der Eindeutigkeit in 2.9, daß $M = I$ ist.

2.11 Satz. <u>Sei</u> $E = L^p(G)$ $(1 \leq p \leq \infty)$.
<u>Ist</u> $\mu \in M^b(G)$ <u>diffus</u>, <u>so gilt</u> $|T_\mu| \wedge T = o$ <u>für alle Verbandshomomorphismen</u> T <u>auf</u> E.

Beweis. Man kann annehmen, daß μ positiv ist. Sei T ein Verbandshomomorphismus auf E und sei $R \in \mathscr{L}(E)_+$, $R \leq T, T_\mu$. Sei $f \in C_c(G)_+$. Wir zeigen $Rf = o$.
Für $n \in \mathbb{N}$ sei $u_n = Tf \wedge n1_G \in L^p(G) \cap L^\infty(G)$. Sei M_n der Zentrumsoperator auf E mit $M_n Tf = u_n$ und $M_n g = g$ für $g \in Tf^\perp$.
Es gilt $\sup M_n = I$ nach 2.1o. Sei $R_n = M_n R \leq M_n T$
Mit $\pi: \mathscr{L}^\infty(G) \to L^\infty(G)$ bezeichnen wir die Quotientenabbildung. Sei $\rho: L^\infty(G) \to \mathscr{L}^\infty(G)$ ein starkes Lifting (siehe Ionescu Tulcea (1969) III,2). ρ ist insbesondere eine lineare Abbildung, so daß

$\pi\rho\pi g = \pi g$ für alle $g \in \mathscr{L}^\infty(G)$
$|\rho\pi g| = \rho|\pi g|$ für alle $g \in \mathscr{L}^\infty(G)$
$\rho\pi g = g$ für alle $g \in C^b(G)$.

Wir identifizieren daher πg und g, falls $g \in C^b(G)$ ist.
Sei $h \in C_c(G)$. Dann ist $(\rho T_\mu h)(s) = \mu * h\,(s) = \int h(t^{-1}s)\, d\mu(t)$ für alle $s \in G$, da $\mu * h \in C^b(G)$ ist.
Sei $s \in G$ fest, $K = \mathrm{supp}(f)$, J das von f in $C(X,K)$ erzeugte Ideal. Durch $g \to (\rho M_n Tg)(s)$ wird ein Verbandshomomorphismus von J nach $\mathbb{C}$ definiert. Daher gibt es ein $t_o \in K$ und ein $c \in \mathbb{R}_+$, so daß $(\rho M_n Tg)(s) = c\, g(t_o)$ für alle $g \in J$ (das sieht man wie in 2.6).
Für $g, h \in C_c(G)_+$ mit $g + h = f$ gilt:

$$(\rho R_n f)(s) = (\rho R_n g)(s) + (\rho R_n h)(s) \leq (\rho M_n Tg)(s) + (\rho T_\mu h)(s)$$
$$= c\, g(t_o) + \int h(t^{-1}s)\, d\mu(t).$$

Daher ist

$$(\rho R_n f)(s) \leq \inf \{ c\, g(t_o) + \int h(t^{-1}s)\, d\mu(t) \mid g,h \in C_c(G)_+, \; g + h = f\}$$

$$= o, \text{ da die Abbildung } h \to \int h(t^{-1}s)\, d\mu(t) \text{ von}$$

$C_c(G)$ nach $\mathbb{C}$ ein diffuses Maß auf G definiert.

Also ist $R_n f = o$ in $L^p(G)$, und somit auch $Rf = \sup R_n f = o$.

Da $f \in C_c(G)_+$ beliebig war, folgt $R = o$, falls $p \neq \infty$.

Sei $p = \infty$. Da $R \leq T_\mu$ ist, ist R ordnungsstetig. Also gibt es $S \in \mathcal{L}(L^1(G))_+$, so daß $S' = R$.

Sei $g \in L^1(G)$. Für alle $f \in C_c(G)$ gilt nach dem oben Bewiesenen $\langle Sg,f\rangle = \langle g,Rf\rangle = o$. Also ist $Sg = o$. Da g beliebig war, ist $S = o$, also auch $R = S' = o$. Der Beweis ist damit beendet.

Der Banachverband $E = L^p(G)$ $(1 \leq p \leq \infty)$ ist genau dann diffus, wenn G nicht diskret ist. Ist das der Fall, so läßt sich $\mathcal{L}^r(E)$ nach Kapitel 1 in drei Bänder zerlegen:

$$\mathcal{L}^r(E) = (E' \otimes E)^{\perp\perp} \oplus \mathcal{L}_s(E) \oplus \mathcal{L}_a(E).$$

Andererseits ist

$$M^b(G) = L^1(G) \oplus M_s(G) \oplus M_a(G),$$

wobei $M_s(G)$ das Band der singulären, diffusen Maße in $M^b(G)$ und $M_a(G)$ das der atomaren bezeichnet. Die vorangehenden Ergebnisse zeigen, daß diese beiden Zerlegungen in eineindeutiger Beziehung stehen. Das heißt genauer:

2.12 Theorem. Sei $E = L^p(G)$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$, $\mu \in M^b(G)$.

Es gilt:

a) $T_\mu \in (E' \otimes E)^{\perp\perp}$ genau dann wenn $\mu \in L^1(G)$

b) $T_\mu \in \mathscr{L}_s(E)$ genau dann wenn $\mu \in M_s(G)$

c) $T_\mu \in \mathscr{L}_a(E)$ genau dann wenn $\mu \in M_a(G)$

2.13 Korollar. Sei $T_\mu = T_1 + T_2 + T_3$ die Zerlegung von T mit $T_1 \in (E' \otimes E)^{\perp\perp}$, $T_2 \in \mathscr{L}_s(E)$, $T_3 \in \mathscr{L}_a(E)$, und sei $\mu = \mu_1 + \mu_2 + \mu_3$, wobei $\mu_1 \in L^1(G)$, $\mu_2 \in M_s(G)$ und $\mu_3 \in M_a(G)$. Dann gilt

$T_i = T_{\mu_i}$ für $i = 1,2,3$.

Ist G eine kompakte Gruppe, so läßt sich 2.12 a) verschärfen (Satz 2.14). Speziel für $p = 1,\infty$ lassen sich eine Reihe von Bedingungen an den Operator $T_{\mu,p}$ angeben, die alle dazu äquivalent sind, daß μ absolut stetig ist (2.15). Die Äquivalenz von 2.15 (ii), (iii) und (v) wird auch von Akemann (1967), allerdings mit ganz anderen Mitteln bewiesen.

2.14 Satz. Sei G eine kompakte Gruppe, $E = L^p(G)$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$. Für $\mu \in M(G)$ sind die beiden folgenden Bedingungen äquivalent.

(i) $\mu \in L^1(G)$

(ii) $T_{\mu,p} \in E' \tilde{\otimes}_e E$

Beweis. (ii) ==> (i) folgt aus 2.5.

(i) ==> (ii) Es gibt ein $f \in L^1(G)$, so daß $\mu = fm$.

1. $f = T_{\alpha ij}$ für ein $\alpha \in \hat{G}$, $i,j \in \{1\ldots n_\alpha\}$ ($T_{\alpha ij} \in C(G)$ sei eine Koeffizientenfunktion der Darstellung $T_\alpha \in \alpha$ (siehe Kapitel o). Dann gilt für $g \in L^p(G)$

$$\begin{aligned} T_\mu g\ (s) = f * g\ (s) &= \int g(t^{-1}s)f(t)dt = \int g(t)f(st^{-1})dt \\ &= \int g(t)\ T_{\alpha ij}(st^{-1})dt \\ &= \sum_{k=1}^{n_\alpha} \int g(t)\ T_{\alpha ik}(s)\ T_{\alpha kj}(t^{-1})\ dt \\ &= \sum_{k=1}^{n_\alpha} \int g(t)\ T^*_{\alpha kj}(t)\ dt\ T_{\alpha ik}(s) \qquad m\text{-f.ü.} \end{aligned}$$

Somit ist $T_\mu = \sum_{k=1}^{n_\alpha} T^*_{\alpha kj} \otimes T_{\alpha ik} \in E' \otimes E$.

2. Aus 1. folgt, daß $T_\mu \in E' \otimes E$ ist, wenn f ein trigonometrisches Polynom ist (d.h. f ist Linearkombination von Funktionen wie in 1.).

3. Sei f beliebig. Es existiert eine Folge (f_n) von trigonometrischen Polynomen, so daß $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ in $L^1(G)$. Nach 2.2 ist mit $\mu_n = f_n \cdot m$ $(n \in \mathbb{N})$ $\|T_{\mu_n} - T_\mu\|_r = \|(f_n - f)\cdot m\| = \|f_n - f\|_1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Daher ist $T_\mu = \lim_{n\to\infty} T_{\mu_n}$ in $\mathcal{L}^r(E)$ und somit gilt $T_\mu \in E'\tilde{\otimes}_e E$ nach 2.

2.15 Satz. <u>Sei</u> $E = L^1(G)$, G <u>eine kompakte Gruppe</u>. <u>Für</u> $\mu \in M(G)$ <u>sind die folgenden Aussagen äquivalent</u>.

(a) $T_{\mu,1} \in E'\tilde{\otimes}_e E$	(a') $T_{\mu,\infty} \in E''\tilde{\otimes}_e E'$
(b) $T_{\mu,1}$ <u>ist kompakt</u>	(b') $T_{\mu,\infty}$ <u>ist kompakt</u>
(c) $T_{\mu,1}$ <u>ist</u> σ-<u>kompakt</u>	(c') $T_{\mu,\infty}$ <u>ist</u> σ-<u>kompakt</u>
(d) $T_{\mu,1} \in (E'\otimes E)^{\perp\perp}$	(d') $T_{\mu,\infty} \in (E''\otimes E')^{\perp\perp}$
(e) $\mu \in L^1(G)$	

Beweis. (a) ==> (b) ==> (c) trivial.

(c) ==> (d) folgt aus Schaefer (1974) IV 9.9

(d) ==> (e) 2.5

(e) ==> (a) 2.14

(e) <==> (a') 2.14

(a') ==> (b') ==> (c') trivial

(c') <==> (e) Nach Schaefer (1974) Kor. zu II 9.4 ist $T_{\mu,\infty} = (T_{\check{\mu},1})'$ genau dann σ-kompakt, wenn $T_{\mu,1}$ σ-kompakt ist d.h. wegen der Äquivalenz von (c) und (e) $\mu \in L^1(G)$.

(d') <==> (e) 2.5

2.16 <u>Beispiel</u>. Sei $G = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ die Kreisgruppe. Nach Hewitt-Zuckerman (1966) existiert ein singuläres (diffuses) Maß μ auf G, $\mu \geq 0$, $\|\mu\| = 1$, so daß $\mu * \mu \in L^2(G) \subset L^1(G)$ ist. Nach 2.12 ist also $T = T_{\mu,2} \in \mathcal{L}_s(E)$ $(E = L^2(G))$, jedoch $T^2 = T_{\mu*\mu,2}$ ist in $(E' \otimes_\varepsilon E)$. $\mathcal{L}_s(E)$ ist also keine Unteralgebra von $\mathcal{L}^r(E)$.

Tatsächlich ist T^2 sogar ein Hilbert-Schmidt Operator auf $L^2(G)$. Sei nämlich $S = \mathcal{F}\, T\, \mathcal{F}^{-1}$ der zu T konjugierte Operator ($\mathcal{F}$: $L^2(G) \to l^2(\mathbb{Z})$ sei die Fourier-Plancherel-Transformation). Dann ist S^2 gegeben durch $S^2 x = \hat{\mu}^2 \cdot x = (\hat{\mu}(n)^2 x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ für alle $x \in l^2(\mathbb{Z})$. Da $\hat{\mu}^2 \in l^2(\mathbb{Z})$, ist S^2 ein Hilbert-Schmidt Operator, also auch T^2.

Das Beispiel zeigt noch mehr: Da $\hat{\mu} \in c_o(\mathbb{Z})$, ist S kompakt, also auch T. Somit ist T ein positiver, kompakter Operator, der senkrecht auf den Kernoperatoren steht.

Aus Theorem 2.12 läßt sich das folgende Ergebnis für Maße auf kompakten Gruppen ableiten (siehe Rudin (1966) 5.6.9 für den abelschen Fall).

2.17 Sei μ ein Maß auf einer kompakten Gruppe G, so daß $\hat{\mu} \in c_o(\hat{G})$ ist. Dann ist μ diffus.

Beweis. Ist $\hat{\mu} \in c_o(\hat{G})$, so ist der Operator $T = T_{\mu,2}$ kompakt (der zu T konjugierte Operator $S = \mathcal{F}\, T\, \mathcal{F}^{-1}$ auf $\mathcal{L}^2(\hat{G})$ ist durch $S\Phi = (\hat{\mu}(\alpha)\Phi_\alpha)_{\alpha \in \hat{G}}$ für alle $\Phi = (\Phi_\alpha)_{\alpha \in \hat{G}}$ gegeben, wobei $\mathcal{F}: L^2(G) \to \mathcal{L}^2(\hat{G})$ die Fourier-Plancherel-Transformation bezeichnet; da $\hat{\mu} \in c_o(\hat{G})$ ist, ist S kompakt, also auch T).
Nach 1.26 ist also $T_{\mu,2} \in \mathcal{L}_a(E)^\perp$ $(E = L^2(G))$ und somit ist μ diffus nach 2.13.

3. Das Ordnungsspektrum.

Der Raum $\mathcal{L}^r(E)$ der regulären Operatoren auf einem komplexen Banachverband E ist eine Unteralgebra von $\mathcal{L}(E)$. Im allgemeinen jedoch ist $\mathcal{L}^r(E)$ keine volle Unteralgebra, d.h. das Inverse in $\mathcal{L}(E)$ eines regulären Operators braucht nicht regülär zu sein (siehe Schaefer (1977) und Beispiele in diesem Kapitel). Somit ist das Spektrum $\sigma_o(T)$ eines regulären Operators T in der Banachalgebra $\mathcal{L}^r(E)$ i.a. größer als sein Spektrum in $\mathcal{L}(E)$. Es stellt sich die Frage, ob es Klassen von Operatoren gibt, für die beide Spektren zusammenfallen. Der Hauptstz dieses Kapitels besagt, daß die Operatoren, die in $E' \tilde{\otimes}_{\varepsilon} E$ liegen, eine solche Klasse bilden.
Die Ergebnisse werden auf die in Kapitel 2 behandelten Faltungsoperatoren angewandt. Aus 2.3 erhält man, daß das Ordnungsspektrum $\sigma_o(T_\mu)$ von T_μ und das Spektrum von μ in der Banachalgebra $M^b(G)$ übereinstimmen (G amenabel).
Als eine Anwendung des Hauptsatzes wird das Spektrum der Elemente der Banachalgebra $L^1(G)$, G eine kompakte Gruppe, mit Hilfe der Fourier Transformation berechnet.
Auf der anderen Seite läßt sich durch die Wahl eines geeigneten Maßes μ ein positiver, kompakter Operator $T = T_\mu$ auf $L^2(G)$, G die Kreisgruppe, angeben, dessen Ordnungsspektrum $\sigma_o(T)$ echt größer als sein Spektrum $\sigma(T)$ ist. Der Hauptsatz läßt sich also nicht auf die kompakten Operatoren verallgemeinern.

3.1 Definition. Sei E ein komplexer Banachverband. Das Spektrum eines regulären Operators T in der Banachalgebra $\mathcal{L}^r(E)$ heißt Ordnungsspektrum und wird mit $\sigma_o(T)$ bezeichnet.

Offensichtlich ist $\sigma(T) \subset \sigma_o(T)$ und es ist
$\sigma_o(T) \setminus \sigma(T) = \{\lambda \notin \sigma(T) \mid (\lambda - T)^{-1}$ ist nicht regulär$\}$.
Aus der Formel für den Spektralradius sieht man, daß $r_o(T) = r(T)$ für $T \geq o$ ist, wobei $r_o(T)$ den Spektralradius von T bzgl. $\mathcal{L}^r(E)$ bezeichnet.
Der topologische Zusammenhang zwischen $\sigma(T)$ und $\sigma_o(T)$ (3.5) wird in Schaefer (1977) (für E ordnungsvollständig) geklärt. Das Ergebnis soll hier etwas allgemeiner formuliert werden.

3.2 Satz. Sei A eine Banachalgebra mit Einselement e und sei B eine Unteralgebra von A mit $e \in B$, die bzgl. einer feineren Norm eine Banachalgebra ist. Sei $x \in B$ und $D \neq \emptyset$ eine in $\sigma_B(x)$ offen-abgeschlossene Menge.
Dann gilt $\sigma_A(x) \cap D \neq \emptyset$.

Beweis. Sei $x \in B$ und $\emptyset \neq D \subset \sigma_B(x)$ offen-abgeschlossen in $\sigma_B(x)$. Dann ist D kompakt in $\mathbb{C}$, und es existiert $O_1 \subset \mathbb{C}$ offen, so daß $D = \sigma_B(x) \cap O_1$.
Angenommen: $D \cap \sigma_A(x) = \emptyset$. Dann gilt auch $D = \sigma_B(x) \cap O$ für $O = O_1 \setminus \sigma_A(x)$. Es existiert eine Menge G, deren Rand ∂G Bild eines rektifizierbaren Weges ist,

so daß $D \subset \overset{\circ}{G} \subset G \subset O$ (siehe z.B. Bonsall-Duncan (1973) I §6). Daher ist $\partial G \subset \complement \sigma_B(x)$, und die Abbildung $\lambda \to R(\lambda, x)$ ist stetig von ∂G nach B. Sei $\lambda_o \in D$. Es existiert $1/2\pi i \int_{\partial G} R(\lambda,x)/(\lambda - \lambda_o) d\lambda \in B$. Da $O \subset \complement \sigma_A(x)$ ist, gilt $R(\lambda_o, x) = 1/2\pi i \int_{\partial G} R(\lambda,x)/(\lambda - \lambda_o)\, d\lambda \in B$, woraus $\lambda_o \notin \sigma_B(x)$ folgt, Widerspruch.

3.3 Korollar. $\sigma_B(x) \setminus \sigma_A(x)$ enthält keine isolierten Punkte.

3.4 Korollar. Ist $\sigma_B(x) \neq \sigma_A(x)$, so ist $\sigma_B(x) \setminus \sigma_A(x)$ überabzählbar.

Beweis. Sei $\lambda_o \in \sigma_B(x) \setminus \sigma_A(x)$. Es existiert ein $r_o > o$, so daß $K(r_o, \lambda_o) = \{ \lambda \mid |\lambda - \lambda_o| \leq r_o\} \subset \complement \sigma_A(x)$. Angenommen, $\sigma_B(x) \setminus \sigma_A(x)$ ist abzählbar. Dann existiert $o < r \leq r_o$, so daß
$S(r, \lambda_o) = \{ \lambda \mid |\lambda - \lambda_o| = r\} \subset \complement \sigma_B(x)$. Sei
$D = \{ \lambda \in \sigma_B(x) \mid |\lambda - \lambda_o| < r\} = \{ \lambda \in \sigma_B(x) \mid |\lambda - \lambda_o| \leq r\}$.
Es ist $D \cap \sigma_A(x) = \emptyset$ im Widerspruch zu 3.2.

3.5 Korollar. Sei E ein komplexer Banachverband, $T \in \mathcal{L}^r(E)$. Dann gilt:

a) Ist $D \subset \sigma_o(T)$ offen-abgeschlossen in $\sigma_o(T)$, dann ist $D \cap \sigma(T) \neq \emptyset$.

b) $\sigma_o(T) \setminus \sigma(T)$ enthält keine isolierten Punkte.

c) Ist $\sigma_o(T) \neq \sigma(T)$, so ist $\sigma_o(T) \setminus \sigma(T)$ überabzählbar.

3.6 Theorem. Sei E ein komplexer Banachverband. Es gilt $\sigma_o(T) = \sigma(T)$, falls $T \in E' \tilde{\otimes}_e E$ ist.

Zum Beweis werden zwei Hilfssätze benötigt.

3.7 Lemma. Sei $T_n = \sum_{i=1}^{r} x_i' \otimes y_i^n \in E' \otimes E \quad (n \in \mathbb{N})$, wobei $(y_i^n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in E bildet $(i=1 \ldots r)$. Dann ist $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $\mathcal{L}^r(E)$.

Beweis. Für $n,m \in \mathbb{N}$ ist $T_n - T_m = \sum_{i=1}^{r} x_i' \otimes (y_i^n - y_i^m)$,

daher ist $|T_n - T_m| \leq \sum_{i=1}^{r} |x_i'| \otimes |y_i^n - y_i^m|$,

und somit $||T_n - T_m||_r \leq \sum_{i=1}^{r} ||x_i'|| \cdot ||y_i^n - y_i^m||$.

Daraus folgt die Behauptung.

3.8 Lemma. Sei $T \in E' \tilde{\otimes}_e E$. Ist $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge regulärer Operatoren, $||S_n||_r \leq M \ (n \in \mathbb{N})$ für ein $M \in \mathbb{R}_+$, so daß $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge bzgl. der Operatornorm bildet, dann ist $(S_n T)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $\mathcal{L}^r(E)$.

Beweis. Sei $\varepsilon > o$. Es existiert ein Operator von endlichem Rang $T_o = \sum_{i=1}^{r} x_i' \otimes x_i$, so daß $||T - T_o||_r < \varepsilon/4M$.
Nach 3.7 existiert ein $n_o \in \mathbb{N}$, so daß für alle $n,m \geq n_o$
$||S_nT_o - S_mT_o||_r = ||\sum_{i=1}^{r} x_i' \otimes S_nx_i - \sum_{i=1}^{r} x_i' \otimes S_mx_i||_r$
$\leq \varepsilon/2$. Für $n,m \geq n_o$ gilt dann:

$$||S_nT - S_mT||_r \leq ||S_nT - S_nT_o||_r + ||S_nT_o - S_mT_o||_r$$
$$+ ||S_mT_o - S_mT||_r$$
$$\leq 2M\ ||T - T_o||_r + ||S_nT_o - S_mT_o||_r \leq \varepsilon.$$

Beweis von Theorem 3.6.

Sei $A = \left\{S \in \mathscr{L}^r(E) \mid ST = TS\right\}$. A ist eine abgeschlossene Unteralgebra von $\mathscr{L}^r(E)$ mit $I_E \in A$.
Da $(\lambda - T^2)^{-1}T = T(\lambda - T^2)^{-1}$ für $\lambda \notin \sigma_o(T^2)$, gilt $\sigma_o(T^2) = \sigma_A(T^2)$. Daher gilt nach o.2 auch $\sigma_o(T^2) = \sigma(R)$, wobei $R: A \to A$ durch $R(S) = ST^2$ für alle $S \in A$ definiert ist.

Der Beweis ist beendet, wenn gezeigt ist, daß R ein kompakter Operator ist. Dann nämlich ist $\sigma(R) = \sigma_o(T^2)$ abzählbar und damit auch $\sigma_o(T)$, weil $\sigma_o(T)^2 = \sigma_o(T^2)$ nach dem spektralen Abbildungssatz, und die Behauptung folgt aus 3.5 c).

Sei $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in A mit $||S_n||_r \leq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Es ist zu zeigen, daß $(R(S_n))_{n \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge besitzt. Sei U die Einheitskugel von E. Die Menge $K := \overline{TU}$ (Normabschluß in E) ist kompakt, da T ein kompakter Operator ist. $\{S_{n|K} \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist eine relativ kompakte Teilmenge von $C_E(K)$, dem Raum der stetigen, E-wertigen Funktionen auf K, versehen mit der sup-Norm. Das folgt aus dem Satz von Arzela-Ascoli, da gilt:

1. $\{S_{n|K} \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist gleichstetig. Für $x_o, x \in K$ gilt nämlich $||S_n x - S_n x_o|| \leq ||S_n|| \; ||x - x_o|| \leq$ $||S_n||_r \; ||x - x_o|| \leq ||x - x_o||$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

2. $\{S_n x \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist relativ kompakt in E für alle $x \in K$. Wegen $STU = TSU \subset TU \subset K$ gilt nämlich $SK \subset K$ für alle $S \in A$ mit $||S|| \leq 1$.

Also besitzt $(S_{n|K})_{n \in \mathbb{N}}$ in $C_E(K)$ eine konvergente Teilfolge $(S_{n_l|K})_{l \in \mathbb{N}}$. Dann ist $(S_{n_l} T)_{l \in \mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $\mathcal{L}(E)$. Nach 3.8 ist $(S_{n_l} T^2)_{l \in \mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $\mathcal{L}^r(E)$, also auch in A, was zu beweisen war.

3.9 Korollar. <u>Sei</u> T <u>ein regulärer Operator auf einem komplexen Banachverband</u> E, <u>so daß für ein</u> $n \in \mathbb{N}$ <u>gilt</u> $T^n \in E' \otimes_e E$.

<u>Dann ist</u> $\sigma_o(T) = \sigma(T)$.

Beweis. Nach 3.6 ist $(\sigma_o(T))^n = \sigma_o(T^n) = \sigma(T^n)$. Also ist $\sigma_o(T)$ abzählbar. Die Behauptung folgt aus 3.5 c).

Die folgenden Sätze geben Eigenschaften des Ordnungsspektrums spezieller regulärer Operatoren an.

Sei T ein positiver Operator auf einem komplexen Banachverband E. Das Ordnungsrandspektrum von T ist die Menge $r\sigma_o(T) = \{\lambda \in \sigma_o(T) \mid |\lambda| = r(T)\}$.

3.1o Satz. Sei T ein positiver Operator auf einem komplexen Banachverband E, so daß gilt:
$T^n \wedge T^m = o$ für alle $n,m \in \mathbb{N} \cup \{o\}$, $n \neq m$.
Dann ist $r\sigma_o(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| = r(T)\}$.

Beweis. Für $|\lambda| > r(T)$ ist $R(\lambda,T) = \sum_{n=o}^{\infty} T^n/\lambda^{n+1}$ (in $\mathscr{L}^r(E)$). Man sieht leicht, daß
$|R(\lambda,T)| = \sup\{\mathrm{Re}\, e^{-i\theta}R(\lambda,T) \mid \theta \in [o, 2\pi]\}$ existiert, und daß gilt $|R(\lambda,T)| = \sum_{n=o}^{\infty} T^n/|\lambda|^{n+1} = R(|\lambda|,T)$.
Es gibt eine gegen $r(T)$ konvergente Folge $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $r_n > r(T)$ $(n \in \mathbb{N})$, so daß $\lim_{n\to\infty} \|R(r_n,T)\| = \infty$ (das folgt aus der Definition von $r(T)$).
Sei $|\lambda| = r(T)$, $\alpha = \lambda/r(T)$. Dann ist $\lambda = \lim_{n\to\infty} r_n\alpha$ und $\lim_{n\to\infty} \|R(r_n\alpha,T)\|_r = \lim_{n\to\infty} \|R(r_n,T)\| = \infty$. Da $\mu \to R(\mu,T)$ stetig auf $\complement\sigma_o(T)$ ist, ist also $\lambda \in \sigma_o(T)$.

Der obige Satz in Verbindung mit 3.6 zeigt, daß es keinen positiven Operator $T \in E'\tilde{\otimes}_e E$ mit disjunkten Potenzen gibt.

3.11 Satz. Verbandshomomorphismen und fast intervallerhaltende Operatoren auf einem ordnungsvollständigen Banachverband haben zyklisches Ordnungsspektrum.

Beweis. Da E ordnungsvollständig ist, ist $\mathscr{L}^r(E)$ ein Banachverband. Ist T ein Verbandshomomorphismus, so ist der Operator $R_T : \mathscr{L}^r(E) \to \mathscr{L}^r(E)$ $(S \to ST)$ intervallerhaltend (1.19), der adjungierte Operator ist also ein Verbandshomomorphismus (o.1). Ist T fast intervallerhaltend, so ist R_T ein Verbandshomomorphismus. Verbandshomomorphismen haben zyklisches Spektrum (Scheffold (1971), siehe auch Schaefer (1974) V 4.4). Die Behauptung folgt aus $\sigma_o(T) = \sigma(R_T) = \sigma((R_T)')$.

Es wird nun das Ordnungsspektrum der Faltungsoperatoren untersucht.

3.12 Satz. <u>Sei</u> G <u>eine lokal kompakte Gruppe</u>.
<u>Ist</u> G <u>amenabel, so ist</u> $\sigma(\mu) = \sigma_o(T_{\mu,p})$ <u>für jedes</u> $\mu \in M^b(G)$ $(1 \leq p \leq \infty)$.
<u>Gibt es umgekehrt ein</u> p $(1 < p < \infty)$, <u>derart daß</u> $\sigma(\mu) = \sigma_o(T_{\mu,p})$ <u>für alle</u> $\mu \in M^b(G)$ <u>gilt, so ist</u> G <u>amenabel</u>.

Beweis. Sei $1 \leq p \leq \infty$, $E = L^p(G)$.
Der Raum F^p (siehe die Definition nach 2.2) ist eine volle Unteralgebra von $\mathscr{L}^r(E)$ (2.3). Es stimmt also $\sigma_o(T_\mu)$ mit dem Spektrum von T_μ in F^p überein. Aus 2.3 folgt daher $\sigma_o(T_\mu) = \sigma(\mu)$, wenn G amenabel ist.
2. Sei $1 < p < \infty$. Ist G nicht amenabel, so gibt es nach 2.3 ein $\mu \in M^b(G)$, so daß $||T_{\mu,p}|| < ||\mu||$. Somit ist

$r_o(T_{\mu,p}) = r(T_{\mu,p}) \leq ||T_{\mu,p}|| < ||\mu|| = r(\mu)$ und daher $\sigma_o(T_{\mu,p}) \neq \sigma(\mu)$.

3.13 Satz. Sei G eine lokal kompakte abelsche Gruppe mit dualer Gruppe $\hat{G}$. Sei $\mu \in M^b(G)$.
Ist $D \subset \sigma(\mu)$ offen-abgeschlossen in $\sigma(\mu)$, dann gibt es ein $\gamma \in \hat{G}$, so daß $\hat{\mu}(\gamma) \in D$.

Beweis. Mit $\mathcal{F}$: $L^2(G) \to L^2(\hat{G})$ bezeichnen wir die Fourier-Plancherel-Transformation. Sei $T = T_{\mu,2}$ und $\hat{T} = \mathcal{F} T \mathcal{F}^{-1}$ der zu T konjungierte Operator auf $L^2(\hat{G})$. Es gilt $\hat{T}f = \hat{\mu} \cdot f$ für alle $f \in L^2(\hat{G})$. Daher ist $\sigma(T) = \sigma(\hat{T}) = \overline{\{\hat{\mu}(\gamma) \mid \gamma \in \hat{G}\}}$. Aus 3.5 a) folgt, daß $\sigma(T) \cap D \neq \emptyset$ ist. Da D offen in $\sigma(\mu)$ ist, existiert $0 \subset \mathbb{C}$ offen, so daß $D = \sigma(\mu) \cap 0$. Es ist
$\overline{\{\hat{\mu}(\gamma) \mid \gamma \in \hat{G}\}} \cap 0 = \overline{\{\hat{\mu}(\gamma) \mid \gamma \in \hat{G}\}} \cap D \neq \emptyset$.
Da 0 offen ist, ist
$\{\hat{\mu}(\gamma) \mid \gamma \in \hat{G}\} \cap D = \{\hat{\mu}(\gamma) \mid \gamma \in \hat{G}\} \cap 0 \neq \emptyset$.

3.14 Korollar. $\sigma(\mu) \setminus \{\hat{\mu}(\gamma) \mid \gamma \in \hat{G}\}$ enthält keine isolierten Punkte. Ist $\sigma(\mu)$ abzählbar, so ist $\sigma(\mu) = \overline{\{\hat{\mu}(\gamma) \mid \gamma \in G\}}$.

3.15 Beispiele. 1. Sei G die Kreisgruppe. Nach Varopoulos (1966) (siehe auch Rudin (196o)) existiert ein Maß μ

auf G mit folgenden Eigenschaften:

$\mu \geq o$, $\|\mu\| = 1$, $\mu = \mu^*$, $\hat{\mu} \in c_o(\mathbb{Z})$

$\mu^n \wedge \mu^m = o$ für alle $n,m \in \mathbb{N}$, $n \neq m$.

Sei $T = T_{\mu,2}$ der zu μ gehörende Faltungsoperator. T hat dann folgende Eigenschaften:

a) $T \geq o$, $T^n \wedge T^m = o$ für alle $n,m \in \mathbb{N}$, $n \neq m$

b) $T = T^*$

c) T ist kompakt

d) $\sigma(T) \subset \mathbb{R}$, $\{z \mid |z| = 1\} \subset \sigma_o(T)$.

Beweis. a) ergibt sich aus 2.3 und b) aus der Bemerkung vor 2.1.

c) Der zu T konjungierte Operator $\hat{T} = \mathfrak{F}\, T \mathfrak{F}^{-1}$ auf $l^2(\mathbb{Z})$ ($\mathfrak{F}: L^2(G) \to l^2(\mathbb{Z})$ ist die Fourier-Plancherel-Transformation) ist durch $\hat{T}x = (\hat{\mu}(n)x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ für $x = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ gegeben. Da $\hat{\mu} \in c_o(\mathbb{Z})$, ist $\hat{T}$, also auch T kompakt.

d) $\sigma(T) \subset \mathbb{R}$ gilt, weil T hermitesch ist. Aus 3.1o folgt die zweite Aussage.

2. Es gibt ein Maß μ auf einer kompakten abelschen Gruppe G, so daß $\sigma(\mu)$ die Einheitskreisscheibe ist, während der Wertevorrat von $\hat{\mu}$ eine Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist (Rudin (1967) 5.4.4). Der Operator $T_{\mu,2}$ auf $L_2(G)$ hat also reelles Spektrum, sein Ordnungsspektrum ist jedoch die ganze Einheitskreisscheibe.

Die folgenden Resultate betreffen die Spektraltheorie in der Gruppenalgebra $L^1(G)$ einer kompakten Gruppe G.

Es handelt sich um Aussagen, die im abelschen Fall aus der Tatsche folgen, daß die Gelfandtransformation von $L^1(G)$ gerade die Fouriertransformation ist.

Sei A eine Banachalgebra ohne Einselement. Man definiert für $x \in A$ $\sigma_A(x) := \sigma_{A_e}(x)$, wobei A_e die durch Adjunktion der Eins zu A entstandene Albebra ist. Eine involutive Banachalgebra heißt symmetrisch, wenn $\sigma(x) \subset \mathbb{R}$ für jedes $x = x^*$ ist.
$A = L^1(G)$ ist eine involutive Algebra , wobei die Involution durch $f^*(s) = \overline{f(s^{-1})}$ ($\overline{z}$ sei das konjugiert Komplexe von $z \in \mathbb{C}$) gegeben ist ($f \in L^1(G)$). Ist G kompakt und nicht endlich, so hat $A = L^1(G)$ kein Einselement. A_e kann man mit dem Band $L^1(G) \oplus \mathbb{C}\delta_e$ in M(G) identifizieren. Sei $f \in L^1(G)$ mit $f = f^*$. Da $L^1(G)$ ein algebraisches Ideal in M(G) ist, sind das Spektrum $\sigma(\mu)$ von $\mu := fm$ in M(G) und das von f in $L^1(G)$ gleich. Nach 2.14 ist $T_{\mu,2} \in E' \tilde{\otimes}_e E$ $(E = L^2(G))$, somit ist nach 3.6 $\sigma_o(T_{\mu,2}) = \sigma(T_{\mu,2})$. Da $T_{\mu,2}$ ein hermitescher Operator auf $L^2(G)$ ist, ist $\sigma(T_{\mu,2}) \subset \mathbb{R}$. Wir haben also
$\sigma_{L^1(G)}(f) = \sigma(\mu) = \sigma_o(T_{\mu,2}) = \sigma(T_{\mu,2}) \subset \mathbb{R}$.
Damit ist der folgende (bekannte) Satz bewiesen:

3.16 Satz. <u>Sei</u> G <u>eine kompakte Gruppe</u>. <u>Die Banachalgebra</u> $L^1(G)$ <u>ist symmetrisch</u>.

Aus der Gleichheit von $\sigma(f)$ und $\sigma(T_{fm,2})$ erhält man noch mehr: Das Spektrum von $f \in L^1(G)$ läßt sich ganz analog zum kommutativen Fall über die Fourier-Transformierte von f berechnen.

Es sei $\hat{G}$ der Dual von G. Die Fourier-Transformierte von f soll mit $\hat{f}$ bezeichnet werden, d.h. es ist $\hat{f} = (\hat{f}_\alpha)_{\alpha \in \hat{G}}$, wobei $\hat{f}_\alpha$ eine $n_\alpha x n_\alpha$ - Matrix ist $(\alpha \in \hat{G})$. Die Menge der Eigenwerte von $\hat{f}_\alpha$ wird mit $\sigma(\hat{f}_\alpha)$ bezeichnet.

3.17 Theorem. Sei G eine kompakte Gruppe. Das Spektrum $\sigma(f)$ von $f \in L^1(G)$ ist die Menge

$$\sigma(f) = \bigcup_{\alpha \in \hat{G}} \sigma(\hat{f}_\alpha) \cup \{o\}.$$

Beweis. Sei $\mathcal{F}: L^2(G) \to \mathcal{L}^2(\hat{G})$ die Fourier-Plancherel-Transformation, $T = T_{fm,2} \in \mathcal{L}(L^2(G))$ und $\hat{T} = \mathcal{F} T \mathcal{F}^{-1}$ der zu T konjugierte Operator auf $\mathcal{L}^2(\hat{G})$. Es ist $\hat{T}\Phi = (\Phi_\alpha \hat{f}_\alpha)_{\alpha \in \hat{G}}$ für alle $\Phi = (\Phi_\alpha)_{\alpha \in \hat{G}}$. Da nach 3.6 und 2.14 gilt $\sigma(f) = \sigma_o(T) = \sigma(T) = \sigma(\hat{T})$, ist zu zeigen, daß

$$\sigma(\hat{T}) = \bigcup_{\alpha \in \hat{G}} \sigma(\hat{f}_\alpha) \cup \{o\}.$$

"$\supset$" Es ist $o \in \sigma(\hat{T})$, da $\hat{T}$ kompakt ist.

Sei $S: \mathcal{L}^2(\hat{G}) \to \mathcal{L}^2(\hat{G})$ ein Operator, der durch $S\Psi = (\Phi_\alpha \Psi_\alpha)_{\alpha \in \hat{G}}$ für alle $\Psi = (\Psi_\alpha)_{\alpha \in \hat{G}}$ definiert ist, wobei $(\Phi_\alpha)_{\alpha \in \hat{G}} \in \mathcal{L}^\infty(\hat{G})$ ist. Ist S invertierbar, so ist Φ_α invertierbar in $\mathcal{L}(H_\alpha)$ für alle $\alpha \in \hat{G}$.

(Beweis. Sei P_α die kanonische Projektion von $\mathcal{L}^2(\hat{G})$ auf $\{\Psi \in \mathcal{L}^2(\hat{G}) \mid \Psi_\beta = o$ für alle $\beta \neq \alpha\} \simeq \mathcal{L}(H_\alpha)$. Es gilt $P_\alpha S = SP_\alpha$, und somit auch

$P_\alpha S^{-1} = S^{-1}SP_\alpha S^{-1} = S^{-1}P_\alpha SS^{-1} = S^{-1}P_\alpha$. S^{-1} läßt also $P_\alpha \mathscr{L}^2(\hat{G}) = \mathscr{L}(H_\alpha)$ invariant, d.h. die Einschränkung S_α von S auf $\mathscr{L}(H_\alpha)$ ist invertierbar. Es gilt $S_\alpha A = A\Psi_\alpha$ für alle $A \in \mathscr{L}(H_\alpha)$. Nach o.2 ist S_α genau dann invertierbar, wenn Ψ_α invertierbar ist.)

Somit gilt: Ist $\lambda \notin \sigma(\hat{T})$, so ist auch $\lambda \notin \sigma(\hat{f}_\alpha)$ für alle $\alpha \in \hat{G}$.

"$\subset$" Sei $\lambda \notin \bigcup_{\alpha \in \hat{G}} \sigma(\hat{f}_\alpha) \cup \{o\}$. Da $f \in c_o(\hat{G})$, gibt es $A \subset \hat{G}$ endlich, so daß für $\alpha \notin A$ gilt $||\hat{f}_\alpha|| < 1/2|\lambda|$.

Sei $H_1 = \{\Phi \in \mathscr{L}^2(\hat{G}) \mid \Phi_\alpha = o \text{ für } \alpha \notin A\}$ und

$H_2 = \{\Phi \in \mathscr{L}^2(\hat{G}) \mid \Phi_\alpha = o \text{ für alle } \alpha \in A\}$.

Dann ist $\mathscr{L}^2(\hat{G}) = H_1 \oplus H_2$ (im Hilbertraumsinn) und $\hat{T}$ läßt H_1, H_2 invariant. Sei $\hat{T}_i = \hat{T}_{|H_i}$ $(i=1,2)$.

Da $||\hat{T}_2|| < 1/2|\lambda|$ ist $\lambda \notin \sigma(\hat{T}_2)$.

Da $\sigma(\hat{T}_1) = \bigcup_{\alpha \in A} \sigma(\hat{f}_\alpha)$, ist $\lambda \notin \sigma(\hat{T}_1)$. Es ist aber $\sigma(\hat{T}) = \sigma(\hat{T}_1) \cup \sigma(\hat{T}_2)$, daher ist $\lambda \notin \sigma(\hat{T})$.

Ist G eine kompakte Gruppe, so ist auch $L^p(G)$ bzgl. der Faltung als Multiplikation eine involutive Banachalgebra $(1 \leq p \leq \infty)$. Da $L^p(G)$ ein Ideal in $L^1(G)$ ist, erhält man aus 3.16, 3.17:

3.18 Korollar. <u>Sei</u> G <u>eine kompakte Gruppe</u>, $1 \leq p \leq \infty$. $L^p(G)$ <u>ist eine symmetrische Banachalgebra</u>. <u>Für</u> $f \in L^p(G)$ <u>ist</u> $\sigma_{L^p(G)} = \bigcup_{\alpha \in \hat{G}} \sigma(\hat{f}_\alpha) \cup \{o\}$.

3.19 Korollar. <u>Sei</u> G <u>eine</u> <u>kompakte</u> <u>Gruppe</u>, $\mu = fm$ <u>mit</u> $f \in L^1(G)$. <u>Es</u> <u>gilt</u>

$$\sigma(T_{\mu,p}) = \bigcup_{\alpha \in \hat{G}} \sigma(\hat{f}_\alpha) \cup \{o\} \quad (1 \leq p \leq \infty).$$

<u>Insbesondere</u> <u>ist</u> $\sigma(T_{\mu,p})$ <u>unabhängig</u> <u>von</u> p.

Beweis. Es ist $\sigma(T_{\mu,p}) = \sigma(\mu) = \bigcup_{\alpha \in \hat{G}} \sigma(\hat{f}_\alpha) \cup \{o\}$ nach 3.6 und 3.17.

4. Das Spektrum von Verbandsisomorphismen

In diesem Kapitel werden Spektrum und Ordnungsspektrum von Verbandsisomorphismen untersucht. Dabei wird folgende Methode benutzt: Der Verbandsisomorphismus T wird mit Hilfe von Bandprojektionen in Komponenten zerlegt, die wieder Verbandsisomorphismen sind und "einfaches" Spektrum haben.

Im ersten Teil des Kapitels werden keinerlei Voraussetzungen an den zugrunde liegenden Banachverband gestellt. Es wird folgendes bewiesen: Läßt sich $\sigma(T)$ durch einen Kreis um den Nullpunkt in zwei offen-abgeschlossene Teilmengen zerlegen, so sind die zugehörigen Spektralprojektionen Bandprojektionen. Daraus folgt, daß $|\lambda| \in \sigma(T)$ ist, falls $\lambda \in \sigma_o(T)$ ist. Das Hauptresultat des ersten Teils besagt, daß $\sigma(T) = \sigma_o(T)$ ist, wenn $\sigma(T) \cap \mathbb{R}_+$ kein offenes Intervall enthält.

Im zweiten Teil des Kapitels setzen wir voraus, daß der zugrunde liegende Banachverband ordnungsvollständig ist. Der Verbandsisomorphismus wird in Komponenten T_n zerlegt, die disjunkte Potenzen bis zur Ordnung n-1 haben und deren n-te Potenz im Zentrum liegt ($n \in \mathbb{N}$). Die Operatoren T_n haben "rotationssymmetrisches Spektrum der Ordnung n". Unter der Voraussetzung, daß die "aperiodische Komponente" von T Null ist, gilt $\sigma(T) = \sigma_o(T)$ (4.19).

Mit den hier betrachteten Zerlegungen ist ein Irreduzibilitätsbegriff verbunden. Irreduzible Verbandsisomorphismen haben sehr einfaches Ordnungsspektrum: Es ist der Kreisring $\{z \in \mathbb{C} \mid r(T^{-1})^{-1} \leq |z| \leq r(T)\}$, das Ordnungsspektrum ist also schon durch die Spektralradien von T und T^{-1} bestimmt.

Am Ende des Kapitels werden Anwendungen besprochen. Eindeutig ergodische Homöomorphismen auf einem kompakten Raum X lassen sich dadurch charakterisieren, daß die Verbandsisomorphismen $f \to h \cdot f \circ \varphi$ einen Kreis als Spektrum haben, wie auch immer der Multiplikator h gewählt wird.

Schließlich werden Verbandsisomorphismen T auf $L^p(X,\Sigma,\mu)$ ((X,Σ,μ) sei ein endlicher Maßraum) betrachtet, die durch eine maßtreue Grundraumtransformation und einen Multiplikator definiert sind. Für diese Operatoren gilt $\sigma(T) = \sigma_o(T)$. Es wird bewiesen, daß das Spektrum unabhängig von p ist.

Bei allen Beweisen spielt eine zentrale Rolle, daß man jedem Verbandsisomorphismus T einen Markoffschen Verbandsisomorphismus $\tilde{T}$ auf $Z(E) = C(X)$ zuordnen kann. Die zu $\tilde{T}$ gehörende Grundraumtransformation φ_T auf X spiegelt eine Reihe von Eigenschaften von T wider. Invariante Projektionsbänder entsprechen unter φ_T invarianten offen-abgeschlossenen Teilmengen von X. Die Disjunktheit von Potenzen von T läßt sich einfach durch Eigenschaften von φ_T ausdrücken. In Spezialfällen (4.7) ist es möglich, vom Spektrum von T direkt auf das Spektrum von $\tilde{T}$ zu schließen.

Alle Banachverbände in diesem Kapitel sind komplex. Sei T ein Verbandsisomorphismus auf einem Banachverband E. Wir benutzen des öfteren die Tatsache, daß gilt: $|\lambda| \in \sigma(T)$, wenn $\lambda \in \sigma(T)$.

(Das folgt aus der Zyklizität des Spektrums (siehe Schaefer (1974) V 4.4), läßt sich aber leicht auch folgendermaßen sehen: Sei $\lambda \in \sigma(T)$. Ist $|\lambda| \notin \sigma(T)$, so so gibt es $\mu \in \partial\sigma(T) \subset A\sigma(T)$ mit $|\mu| = |\lambda|$. Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es also $x \in E$ mit $||x|| = 1$, so daß $||\mu x - Tx|| < \varepsilon$. Somit ist $|| |\mu||x| - T|x| || = || |\mu x| - |Tx| || \leq || |\mu x - Tx| || < \varepsilon$. Also ist auch $|\lambda| = |\mu| \in A\sigma(T)$, Widerspruch!)

Aus dem spektralen Abbildungssatz folgt, daß $\sigma(T) \subset \sigma_o(T) \subset \{z \in \mathbb{C} \mid r(T^{-1})^{-1} \leq |z| \leq r(T)\}$.

Gibt es also ein $s \in (r(T^{-1})^{-1}, r(T))$ mit $s \notin \sigma(T)$, so zerfällt $\sigma(T)$ in zwei Spektralmengen, wie es der folgende Satz beschreibt.

4.1 Satz. <u>Sei</u> T <u>ein Verbandsisomorphismus auf einem Banachverband</u> E. <u>Das Spektrum</u> $\sigma(T)$ <u>von</u> T <u>zerfalle in zwei Mengen</u> σ_1 <u>und</u> σ_2 <u>dergestalt, daß ein</u> $s > 0$ <u>existiert, so daß gilt</u>

$$|\lambda| < s \quad \text{für } \lambda \in \sigma_1 \quad \text{und } |\lambda| > s \quad \text{für } \lambda \in \sigma_2 \; .$$

<u>Dann sind die zu</u> σ_1 <u>und</u> σ_2 <u>gehörenden Spektralprojektionen Bandprojektionen</u>.

Beweis. Sei $\Gamma_s = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = s\}$ und $P = 1/2\pi i \int_{\Gamma_s} R(\lambda,T)d\lambda$ die Spektralprojektion zu σ_1. Es sei $E_1 = PE$, $E_2 = (I-P)E$ und T_i bezeichne die Einschränkung von T auf E_i $(i=1,2)$. Dann ist $\sigma(T_1) = \sigma_1$ und $\sigma(T_2) = \sigma_2$. Insbesondere ist $r(T_1) < s < r(T_2^{-1})^{-1}$.

Sei $x \in E_1$. Dann ist

$R(s,T)x = R(s,T_1)x = \sum_{n=o}^{\infty} (T_1^n/s^{n+1})x = \sum_{n=o}^{\infty} (T^n/s^{n+1})x$,

und es ist $\sum_{n=o}^{\infty} ||T^n x||/s^{n+1} < \infty$. Da T ein Verbandshomomorphismus ist, gilt für $|y| \leq |x|$ und $\lambda \in \Gamma_s$

$\sum_{n=o}^{\infty} ||T^n y/\lambda^{n+1}|| \leq \sum_{n=o}^{\infty} ||T^n x/s^{n+1}|| < \infty$. Daher ist die Reihe $\sum_{n=o}^{\infty} T^n y/\lambda^{n+1}$ für $\lambda \in \Gamma_s$ und $|y| \leq |x|$ gleichmäßig konvergent, und es ist $(\lambda - T)\sum_{n=o}^{\infty} T^n y/\lambda^{n+1} = \lim_{m\to\infty} (y - T^{m+1}y/\lambda^{m+1}) = y$, d.h. es ist

$R(\lambda,T)y = \sum_{n=o}^{\infty} T^n y/\lambda^{n+1}$. Somit ist für $y \in E$ mit $|y| \leq |x|$

$Py = 1/2\pi i \int_{\Gamma_s} \sum_{n=o}^{\infty} T^n y/\lambda^{n+1}\, d\lambda = \sum_{n=o}^{\infty} 1/2\pi i \int_{\Gamma_s} 1/\lambda^{n+1}\, d\lambda\, T^n y$

$=y$, da die Reihe gleichmäßig für $\lambda \in \Gamma_s$ konvergiert.

Also ist $y \in E_1$ für jedes $y \in E$ mit $|y| \leq |x|$, d.h. E_1 ist ein Ideal.

Sei $x \in E_2$. Für $\lambda \in \Gamma_s$ ist

$R(\lambda, T_2)x = \sum_{n=o}^{\infty} -\lambda^n T_2^{-(n+1)}x = \sum_{n=o}^{\infty} -\lambda^n T^{-(n+1)}x$,

und es ist $\sum_{n=o}^{\infty} s^n ||T^{-(n+1)}x|| < \infty$.

Da T^{-1} ein Verbandshomomorphismus ist, ist für $|y| \leq |x|$

$\sum_{n=o}^{\infty} ||-\lambda^n T^{-(n+1)}y|| \leq \sum_{n=o}^{\infty} s^n ||T^{-(n+1)}x||$ für alle $\lambda \in \Gamma_s$.

Somit ist $R(\lambda,T)y = \sum_{n=o}^{\infty} -\lambda^n T^{-(n+1)}y$ und daher

$Py = 1/2\pi i \int_{\Gamma_\varsigma} R(\lambda,T)y\, d\lambda = \sum_{n=o}^{\infty} 1/2\pi i \int_{\Gamma_\varsigma} -\lambda^n\, d\lambda\; T^{-(n+1)}y = o.$

Also ist $y \in E_2$, wenn $|y| \leq |x|$. Damit ist bewiesen, daß E_2 ein Ideal ist.

Da E die direkte Summe von E_1 und E_2 ist, sind E_1 und E_2 Projektionsbänder und P ist eine Bandprojektion (Schaefer (1974) II 2.7).

4.2 Definition. <u>Sei</u> T <u>ein Verbandsisomorphismus auf einem Banachverband</u> E.

a) <u>Wir sagen</u>: <u>Eine Bandprojektion</u> P <u>reduziert</u> T, <u>wenn gilt</u> TP = PT. <u>Ist das der Fall</u>, <u>so sei</u> T_1 <u>die Einschränkung von</u> T <u>auf</u> PE <u>und</u> T_2 <u>die Einschränkung von</u> T <u>auf</u> (I-P)E. T_1 <u>und</u> T_2 <u>sind Verbandsisomorphismen</u>. <u>Wir sagen</u>: T <u>ist die direkte Summe von</u> T_1 <u>und</u> T_2.

b) T <u>heißt bandirreduzibel</u>, <u>wenn es keine Bandprojektion gibt</u>, <u>die</u> T <u>reduziert</u>.

Sei P eine Bandprojekton auf $E_1 = PE$. Dann reduziert P genau dann T, wenn gilt $TE_1 \subset E_1$ und $T^{-1}E_1 \subset E_1$. Ist T die orthogonale Summe von T_1 und T_2, so ist offensichtlich $\sigma(T) = \sigma(T_1) \cup \sigma(T_2)$ und $\sigma_o(T) \subset \sigma_o(T_1) \cup \sigma_o(T_2)$; ist E ordnungsvollständig, so ist $\sigma_o(T) = \sigma_o(T_1) \cup \sigma_o(T_2)$.

Z.B. ist jeder Verbandsisomorphismus auf $C(X)$, X kompakt und zusammenhängend, bandirreduzibel.

4.3 Korollar. <u>Sei</u> T <u>ein bandirreduzibler Verbandsisomorphismus</u>. <u>Dann ist</u> $\sigma(T) \cap \mathbb{R}_+ = [r(T^{-1})^{-1}, r(T)]$.

4.4 Korollar. <u>Sei</u> T <u>ein Verbandsisomorphismus</u>. <u>Ist</u> $\lambda \in \sigma_o(T)$, <u>so ist</u> $|\lambda| \in \sigma(T)$.

Beweis. Sei $\lambda \in \sigma_o(T)$. Angenommen, es ist $|\lambda| \notin \sigma(T)$. Dann ist T nach 4.1 die orthogonale Summe von zwei Verbandsisomorphismen T_1 und T_2 mit $r(T_1) < |\lambda| < r(T_2^{-1})^{-1}$. Daher ist $\lambda \notin \sigma_o(T_1) \cup \sigma_o(T_2)$, und somit ist $\lambda \notin \sigma_o(T)$, Widerspruch.

Sei T ein Verbandsisomorphismus auf einem Banachverband E. Ist $M \in Z(E)$, so ist $TMT^{-1} \in Z(E)$.
(Sei nämlich M reell. Dann gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, so daß $-nI \leq M \leq nI$. Damit ist aber auch $-nI \leq TMT^{-1} \leq nI$, da $T, T^{-1} \geq o$. Also ist $TMT^{-1} \in Z(E)$.
Ist M beliebig, so ist $\operatorname{Re}M, \operatorname{Im}M \in Z(E)$.
Da $T(\operatorname{Re}M)T^{-1} = \operatorname{Re}(TMT^{-1})$ und $T(\operatorname{Im}M)T^{-1} = \operatorname{Im}(TMT^{-1})$, ist also $TMT^{-1} = \operatorname{Re}(TMT^{-1}) + i\operatorname{Im}(TMT^{-1}) \in Z(E)$.)

Da für $M,N \in Z(E)$ gilt $TMNT^{-1} = (TMT^{-1})(TNT^{-1})$, ist die Abbildung $M \to TMT^{-1}$ ein Automorphismus auf $Z(E)$.

4.5 Definition. <u>Sei</u> T <u>ein</u> <u>Verbandsisomorphismus</u> <u>auf</u> <u>einem</u> <u>Banachverband</u> E. <u>Der</u> <u>Operator</u> $\tilde{T}: Z(E) \to Z(E)$ $(M \to TMT^{-1})$ <u>heißt</u> <u>der</u> <u>zu</u> T <u>assoziierte</u> <u>Automorphismus</u> <u>auf</u> $Z(E)$.
<u>Identifiziert</u> <u>man</u> $Z(E)$ <u>mit</u> $C(X)$, <u>so</u> <u>gibt</u> <u>es</u> <u>einen</u> <u>Homöomorphismus</u> φ_T <u>auf</u> X, <u>so</u> <u>daß</u> $\tilde{T}f = f \circ \varphi_T$ <u>für</u> <u>alle</u> $f \in C(X)$. φ_T <u>heißt</u> <u>der</u> <u>zu</u> $\tilde{T}$ <u>assoziierte</u> <u>Homöomorphismus</u>.

Der kompakte Raum X in 4.5 ist bis auf Homöomorphie eindeutig bestimmt. Der Homöomorphismus φ_T ist in entsprechender Weise eindeutig.

<u>Beispiel</u>: Sei T ein Verbandsisomorphismus auf $E = C(X)$. Dann gibt es einen Homöomorphismus φ auf X und ein strikt positives $h \in C(X)$, so daß $Tf = h\, f \circ \varphi$ für alle $f \in C(X)$. Es ist $T^{-1}f = (1/h \circ \varphi^{-1})\, f \circ \varphi^{-1}$ für $f \in C(X)$. Sei $C(X) \to Z(C(X))$ $(k \to M_k)$ der natürliche Isomorphismus, wobei $M_k f = k \cdot f$ $(f \in C(X))$ für $k \in C(X)$. Dann ist $TM_kT^{-1}f = T(k(1/h \circ \varphi^{-1})\, f \circ \varphi^{-1}) = h\, k \circ \varphi\,(1/h) f$ $= k \circ \varphi\, f = M_{k \circ \varphi}\, f$ $(f \in C(X))$. Es ist also $\varphi = \varphi_T$.

4.6 Lemma. Sei E ein Banachverband. Durch die Zuordnung $Q(T) = \tilde{T}$ wird ein Gruppenhomomorphismus Q von der Gruppe der Verbandsisomorphismen auf E in die Gruppe der Automorphismen auf $Z(E)$ definiert.
Ist E ordnungsvollständig, so ist
$\text{Kern}\, Q = \{T \in Z(E) \mid T > cI \text{ für ein } c > o\}$.

Beweis. Seien S,T Verbandsisomorphismen. Für $M \in Z(E)$ ist $(Q(S)Q(T))(M) = STMT^{-1}S^{-1} = Q(ST)(M)$. Somit ist Q multiplikativ.
Sei $T \in Z(E)$. Aus 1.8 folgt, daß T genau dann ein Verbandsisomorphismus ist, wenn es ein $c > o$ gibt, so daß $T > cI$. Ist das der Fall, so ist $Q(T) = I$, da $Z(E)$ kommutativ ist.
Sei umgekehrt T ein Verbandsisomorphismus mit $Q(T) = I$. Seien $x,y \in E$ mit $x \wedge y = o$. Die Bandprojektion P auf das von x erzeugte Band liegt im Zentrum. Also ist $TPT^{-1} = P$, und daher $Tx = TPx = PTx$, d.h. es ist $Tx \in x^{\perp\perp}$ und somit $Tx \wedge y = o$. Aus 1.11 folgt $T \in Z(E)$. Damit ist alles gezeigt.

Wir benötigen den folgenden Satz, der in Schaefer et al. (1978) bewiesen wurde. Hier soll ein anderer Beweis angegeben werden, der sich auf 4.6 stützt.

Zuvor ein Spezialfall:

Ein Markoffscher Verbandsisomorphismus T auf $C(X)$ mit $\sigma(T) = \{1\}$ ist die Identität.

(Man kann das folgendermaßen einsehen: Es gibt einen Homöomorphismus φ auf X, so daß $Tf = f \circ \varphi$ für alle $f \in C(X)$. Ist $T \neq I$, so gibt es ein $s \in X$ mit $\varphi(s) \neq s$.

1. Fall: Es gibt ein $n > 1$, so daß $\varphi^m(s) \neq s$ für $1 \leq m \leq n-1$ und $\varphi^n(s) = s$.

Sei $\alpha = e^{i2\pi/n}$. Setze $\mu = \sum_{k=o}^{n-1} \alpha^{-k} \delta_{\varphi^k(s)}$. Dann ist $T'\mu = \alpha\mu$ und somit $\alpha \in \sigma(T') = \sigma(T)$.

2.Fall: Es ist $\varphi^n(s) \neq s$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Sei $S = \{\varphi^n(s) \mid n \in \mathbb{Z}\}$. $l^1(S)$ ist ein unter T' und $(T')^{-1}$ invariantes Band in $M(X)$. Sei R die Einschränkung von T' auf $l^1(S)$. Definiere $x \in l^\infty(S)$ durch $x(\varphi^n(s)) = (-1)^n$ $(n \in \mathbb{N})$. Dann ist $R'x = -x$ und somit ist $(-1) \in \sigma(R') = \sigma(R) \subset \sigma(T') = \sigma(T)$.

In jedem Fall ist also $\sigma(T) \neq \{1\}$.)

4.7 Theorem. <u>Sei</u> T <u>ein Verbandsisomorphismus auf einem Banachverband mit</u> $\sigma(T) \subset \mathbb{R}_+$. <u>Dann liegt</u> T <u>im Zentrum</u>.

Beweis. Da T genau dann im Zentrum liegt, wenn T' im Zentrum liegt, kann man annehmen, daß E ordnungsvollständig ist. Seien $L, R: \mathscr{L}(E) \to \mathscr{L}(E)$ gegeben durch $L(S) = TS$ und $R(S) = ST^{-1}$ für alle $S \in \mathscr{L}(E)$. Sei $K = L \circ R$.

Da $L \circ R = R \circ L$, ist $\sigma(K) \subset \sigma(L)\cdot\sigma(R) = \sigma(T)\cdot\sigma(T^{-1}) \subset \mathbb{R}_+$. Es ist $K(Z(E)) \subset Z(E)$ und $K_{|Z(E)} = \tilde{T}$. Da $\tilde{T}$ ein Markoffscher Verbandsisomorphismus ist, gilt $\sigma(\tilde{T}) \subset \Gamma$. Es ist also $\sigma(\tilde{T}) = A\sigma(\tilde{T}) \subset A\sigma(K) \subset \mathbb{R}_+$. Daraus folgt $\sigma(\tilde{T}) \subset \mathbb{R}_+ \cap \Gamma = \{1\}$. Nach obigem Spezialfall ist also $\tilde{T} = I$ und daher $T \in Z(E)$ nach 4.6.

4.8 Theorem. <u>Sei T ein Verbandsisomorphismus auf einem Banachverband, so daß $\sigma(T) \cap \mathbb{R}_+$ kein offenes Intervall enthält. Dann ist</u> $\sigma(T) = \sigma_o(T)$.

Beweis. Angenommen, es gibt $\lambda \in \sigma_o(T) \setminus \sigma(T)$. Dann gibt es ein $\varepsilon > o$, so daß $K(\lambda,\varepsilon) \cap \sigma(T) = \emptyset$, wobei $K(\lambda,\varepsilon) = \{z \in \mathbb{C} \mid |\lambda - z| < \varepsilon\}$. Aus der Voraussetzung und 4.1 folgt, daß es ein $\delta \in (o,\varepsilon)$ gibt, so daß T die orthogonale Summe zweier Verbandsisomorphismen T_1 und T_2 ist, so daß $\sigma(T_1) \subset \{z \in \mathbb{C} \mid |\lambda|-\delta \leq |z| \leq |\lambda| + \delta\}$,

$$\sigma(T_2) \cap \{z \in \mathbb{C} \mid |\lambda| - \delta \leq |z| \leq |\lambda| + \delta\} = \emptyset.$$

Da $K(\lambda,\varepsilon) \cap \sigma(T_1) = \emptyset$ und $\sigma(T_1)$ zyklisch ist, gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, so daß $\sigma(T_1)^n \subset \mathbb{R}_+$. Also ist $\sigma(T_1{}^n) \subset \mathbb{R}_+$, und somit ist T_1 im Zentrum nach 4.7. Aus 1.8 folgt $\sigma_o(T_1{}^n) = \sigma(T_1{}^n)$, und somit ist $\sigma_o(T_1)^n \subset \mathbb{R}_+$. Daher ist die Menge $D = \{z \in \sigma_o(T_1) \mid z = r\lambda/|\lambda| \text{ für ein } r \in \mathbb{R}_+\}$ offen-abgeschlossen in $\sigma_o(T_1)$. Aber es gilt $\lambda \in \sigma_o(T_1)$ und $D \subset K(\lambda,\varepsilon) \subset \complement\sigma(T_1)$. Das ist ein Widerspruch zu 3.5a).

Im Beweis von 4.8 wurde die volle Zyklizität des Spektrums eines Verbandsisomorphismus ausgenutzt. Es soll nun ein von 4.7 und 4.8 unabhängiger Weg beschritten werden, bei dem weder die Voraussetzung über die Menge $\mathbb{R}_+ \cap \sigma(T)$ noch die Zyklizität des Spektrums benutzt wird. Den Zyklizitätsbegriff ersetzen wir vielmehr durch eine schärfere geometrische Eigenschaft, die in der folgenden Definition erklärt wird.

4.9 Definition. 1. Eine kompakte Teilmenge σ von $\mathbb{C}$ heißt <u>rotationssymmetrisch der Ordnung</u> n ($n \in \mathbb{N}$), wenn gilt: Eine komplexe Zahl λ ist genau dann Element von σ, wenn $|\lambda| \in \sigma$ ist und ein $k \in \{o,1,..,n-1\}$ existiert, so daß $\lambda = |\lambda| \cdot e^{2\pi ik/n}$ ist.

σ heißt <u>rotationssymmetrisch der Ordnung</u> ∞, wenn gilt: $\lambda \in \sigma$ ist äquivalent zu $|\lambda| \in \sigma$.

2. Wir sagen, ein Homöomorphismus φ auf einem kompakten Raum X hat die <u>strikte Periode</u> n ($n \in \mathbb{N}$), wenn gilt:

a) $\varphi^n = id_X$

b) $\{s \in X \mid \varphi^m(s) = s\}$ ist rar für $1 \leq m \leq n-1$.

φ heißt <u>aperiodisch</u>, wenn die Menge $\{s \in X \mid \varphi^m(s) = s\}$ für alle $m \in \mathbb{N}$ rar ist.

3. Wir sagen, ein Verbandsisomorphismus T auf einem Banachverband E hat die <u>strikte Periode</u> n ($n \in \mathbb{N}$), wenn gilt:

a) $T^n \in Z(E)$

b) $I \wedge T^m = o$ für $1 \leq m \leq n-1$.

T heißt aperiodisch, wenn $I \wedge T^m = o$ für alle $m \in \mathbb{N}$.

4.1o Lemma. Sei T ein Verbandsisomorphismus auf $C(X)$, X kompakt, gegeben durch $Tf = h\, f \circ \varphi$, wobei $h \in C(X)_+$ und φ ein Homöomorphismus auf X ist.

a) Genau dann ist $I \wedge T = o$, wenn die Menge $A = \{s \in X \mid \varphi(s) = s\}$ rar ist.

b) T hat genau dann die strikte Periode n, wenn φ die strikte Periode n hat.

Beweis. a) Sei $\overset{o}{A} \neq \emptyset$. Es gibt δ, $o < \delta \leq 1$, so daß $h(s) \geq \delta$ für alle $s \in X$, da T ein Verbandsisomorphismus ist. Da $\overset{o}{A} \neq \emptyset$ ist, gibt es $g \in C(X)_+$, $g \neq o$, so daß $g \leq \delta 1_A$. Sei $Mf = gf$ für alle $f \in C(X)$. Dann ist $M \neq o$ und $o \leq M \leq T$, I.

Sei umgekehrt $\overset{o}{A} = \emptyset$ und $S \leq I, T$. Sei $k \in C(X)_+$. Zu $s \notin A$ gibt es $g \in C(X)$, $o \leq g \leq k$, so daß $g(s) = k(s)$ und $g(\varphi(s)) = o$. Somit ist $Sk(s) = Sg(s) + S(k-g)(s) \leq Tg(s) + (k-g)(s) = o$. Daher ist $Sk(s) \leq o$ für alle $s \notin A$. Da $\complement A$ dicht in X ist, ist $Sk \leq o$. Also ist $S \leq o$.

b) ergibt sich, indem man a) auf T^m $(1 \leq m \leq n-1)$ anwendet.

4.11 Lemma. <u>Sei φ ein Homöomorphismus auf einem kompakten stoneschen Raum</u> X. <u>Die Menge</u> $A = \{s \in X \mid \varphi(s) = s\}$ <u>ist offen-abgeschlossen</u>.

Beweis. 1.Fall: A ist rar. Zu zeigen: A ist leer.
Sei $\mathfrak{M} = \{O \subset X \text{ offen} \mid O \cap \varphi(O) = \emptyset\}$. Wie man leicht sieht, ist $\mathfrak{M}$ bzgl. der Inklusion induktiv geordnet und nicht leer, da $\emptyset \in \mathfrak{M}$. Nach dem Lemma von Zorn existiert ein maximales Element O von $\mathfrak{M}$. Da X stonesch ist, ist O abgeschlossen. Weiter ist $X = \varphi^{-1}(O) \cup O \cup \varphi(O)$. (Die Menge $Y = X \setminus (\varphi^{-1}(O) \cup O \cup \varphi(O))$ ist nämlich offen. Wäre $Y \neq \emptyset$, so gäbe es eine offen-abgeschlossene Teilmenge $O_1 \neq \emptyset$ von Y, so daß $O_1 \cap \varphi(O_1) = \emptyset$. Dann ist aber $O \cup O_1 \in \mathfrak{M}$ im Widerspruch zur Maximalität von O.)
Angenommen, A ist nicht leer. Sei $s \in A$. Ist $s \in \varphi^{-1}(O)$, so gibt es $t \in O$, so daß $s = \varphi(s) = t$, d.h. es ist $\varphi^{-1}(t) = t$ und somit $\varphi(t) = t$, Widerspruch! Da nach Konstruktion von O $s \notin O$, ist $s \in \varphi(O)$, d.h. es gibt $t \in O$, so daß $\varphi(t) = s = \varphi(s)$. Damit ist $s = t \in O$, Widerspruch! Also ist $A = \emptyset$.
2. Fall: A ist beliebig. $\mathring{A}$ ist offen-abgeschlossen und invariant unter φ, somit auch $Y := X \setminus \mathring{A}$. Nach Definition ist $B = \{s \in Y \mid s = \varphi(s)\}$ rar und nach 1. leer, d.h. es ist $A = \mathring{A}$.

Aus 4.11 ergibt sich, daß ein Homöomorphismus φ auf einem kompakten, stoneschen Raum X genau dann die strikte Periode n hat, wenn $\varphi^n = id_X$ und $\varphi^m(s) \neq s$ für alle $s \in X$ und $m \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq m \leq n-1$. φ ist genau dann aperiodisch, wenn $\varphi^m(s) \neq s$ für alle $s \in X$ und $m \in \mathbb{N}$.

Wir werden im folgenden wiederholt zur Untersuchung eines Verbandsisomorphismus T den zu T assoziierten Markoffschen Verbandsisomorphismus $\tilde{T}$ auf Z(E) heranziehen (4.5). Dabei identifizieren wir oft stillschweigend Z(E) mit C(X). Die Operatoren in Z(E) bezeichnen wir daher auch mit Buchstaben f,g. Der Operator $\tilde{T}$ ist gegeben durch $\tilde{T}f = TfT^{-1} = f \circ \varphi_T$, wobei φ_T der zu T assoziierte Homöomorphismus auf X ist.
Sei P eine Bandprojektion auf das Band E_1. Es gibt eine offenabgeschlossene Teilmenge A von X, so daß $P = 1_A \in C(X) = Z(E)$. P reduziert genau dann T, wenn $TP = PT$ ist, d.h. wenn $TPT^{-1} = P$ gilt, und das bedeutet, daß $\varphi_T(A) = A$ ist. Sei $T_1 = T_{|E_1}$. Identifiziert man $Z(E_1)$ mit C(A), so ist der zu T assoziierte Markoffsche Verbandsisomorphismus $\tilde{T}_1$ gegeben durch $\tilde{T}_1 f = f \circ \varphi_{T|A}$ ($f \in C(A)$), d.h. es ist $\varphi_{T_1} = \varphi_{T|A}$.
Ist E ein ordnungsvollständiger Banachverband, so ist Z(E) ein Projektionsband in $\mathcal{L}^r(E)$. Das Bild unter der zugehörigen Bandprojektion eines positiven Operators S ist der Operator $S_o = \sup_{n \in \mathbb{N}} S \wedge nI \in Z(E)$.

4.12 Lemma. <u>Sei</u> T <u>ein Verbandsisomorphismus auf einem ordnungsvollständigen Banachverband</u> E.

<u>Sei</u> $T_o = \sup_{n\in\mathbb{N}} nI \wedge T$.

<u>Dann ist</u> $T_o = TP = PT$, <u>wobei</u> $P = \sup_{n\in\mathbb{N}} (nT \wedge I) = \sup_{n\in\mathbb{N}} (nT^{-1} \wedge I)$ <u>eine Bandprojektion ist</u>.

<u>Ist</u> $Z(E) = C(X)$ <u>und</u> φ_T <u>der zu</u> T <u>gehörende Homöomorphismus auf</u> X, <u>so ist</u> $P = 1_A$ <u>mit</u>

$A = \{s \in X \mid \varphi_T(s) = s\}$.

Beweis. Sei $f = I \wedge T \in Z(E) = C(X)$.

Setze $C = \overline{\{s \in X \mid f(s) > o\}}$. C ist offen-abgeschlossen.

Man sieht leicht, daß $1_C = \sup_{n\in\mathbb{N}} nf \wedge 1_X$ in $C(X)$ ist.

Daher ist $P = \sup_{n\in\mathbb{N}} (nT \wedge I) = \sup_{n\in\mathbb{N}} (n(T \wedge I) \wedge I) = 1_C$ eine Bandprojektion, genauso $Q = \sup_{n\in\mathbb{N}} (nT^{-1} \wedge I)$.

Es gilt für $x \in E$: $Px = o \Leftrightarrow (T \wedge I)x = o \Leftrightarrow T^{-1}(T \wedge I)x = (I \wedge T^{-1})x = o \Leftrightarrow Qx = o$. Also ist Kern P = Kern Q, d.h. $P = Q$. Ferner ist

$PT = \sup_{n\in\mathbb{N}} (nT^{-1} \wedge I)T = \sup_{n\in\mathbb{N}} (nI \wedge T) = T_o$ nach 1.17.

Genauso $TP = \sup_{n\in\mathbb{N}} T(nT^{-1} \wedge I) = T_o$.

Bleibt zu zeigen, daß $P = 1_A$ ist. Sei $B \subset X$ offen-abgeschlossen. Dann ist $1_B 1_A T = 1_{A\cap B} T = TT^{-1}1_{A\cap B}T = T\, 1_{A\cap B} \circ \varphi_T^{-1} = T\, 1_{A\cap B} = T1_A 1_B = 1_A T 1_B$, da $T1_A = T1_A T^{-1} T = 1_A \circ \varphi_T\, T = 1_A T$. Somit vertauscht $1_A T$ mit allen Bandprojektionen, d.h. es ist $1_A T \in Z(E)$ nach 1.11, und damit ist $1_A T \leq PT = T_o$, also ist $1_A \leq P = 1_C$ und somit $A \subset C$. Angenommen, es ist $A \neq C$. Dann folgt aus der Definition von A, daß es eine offen-abgeschlossene Teilmenge D von $C \setminus A$ gibt, so daß $\varphi_T(D) \neq D$ ist. Dann aber ist $1_D 1_C T = 1_D T \neq T 1_D T^{-1} T = T 1_D = T 1_C 1_D = 1_C T 1_D$. Somit ist $1_C T = PT$ nicht im Zentrum, Widerspruch.

Sei Z(E) gleichzeitig dargestellt als C(X) und C(Y), und seien φ_T und ψ_T die bzgl. dieser Darstellungen zu T gehörenden Homöomorphismen auf X bzw. Y.
Sei $A = \{ s \in X \mid \varphi_T(s) = s \}$ und
$B = \{ t \in Y \mid \psi_T(t) = t \}$. 4.12 zeigt, daß 1_A und 1_B die gleichen Bandprojektionen auf E definieren.

4.13 Korollar. <u>Sei</u> T <u>ein</u> <u>Verbandsisomorphismus</u> <u>auf</u> <u>einem</u> <u>ordnungsvollständigen</u> <u>Banachverband</u> E.
<u>Sei</u> Z(E) = C(X) <u>und</u> φ_T <u>der</u> <u>zu</u> T <u>assoziierte</u> <u>Homöomorphismus</u> <u>auf</u> X.
T <u>hat</u> <u>genau</u> <u>dann</u> <u>die</u> <u>strikte</u> <u>Periode</u> n ($n \in \mathbb{N}$), <u>wenn</u> φ_T <u>die</u> <u>strikte</u> <u>Periode</u> n <u>hat</u>.
T <u>ist</u> <u>genau</u> <u>dann</u> <u>aperiodisch</u>, <u>wenn</u> φ_T <u>aperiodisch</u> <u>ist</u>.

Der Beweis ergibt sich unmittelbar aus 4.12 und 4.6.

4.14 Definition. Sei T ein Verbandsisomorphismus auf einem ordnungsvollständigen Banachverband E. Es sei

$$P_1 = \sup_{m \in \mathbb{N}} (mT \wedge I),$$

$$P_{n+1} = \sup_{m \in \mathbb{N}} (mT^{n+1} \wedge I) \wedge (I - (P_1 \vee \ldots \vee P_n)) \qquad (n \in \mathbb{N},\ n \geq 1),$$

$$P_\infty = I - \sup_{n \in \mathbb{N}} P_n.$$

Für $n \in \mathbb{N}$ sei $E_n = P_n E$, und $T_n \in \mathcal{L}(E_n)$ sei die Einschränkung von T auf E_n.

Sei $M = \{n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\} \mid E_n \neq o\}$.

Die Menge $\{(T_n, E_n) \mid n \in M\}$ heißt <u>die kanonische Zerlegung von</u> T. Ist $n \neq \infty$, so nennen wir T_n <u>die Komponente von</u> T <u>mit strikter Periode</u> n. T_∞ heißt <u>die aperiodische Komponente von</u> T.

Die vorangehenden Lemmata zeigen, daß die Definition sinnvoll ist: Die Bänder E_n sind invariant unter T und T^{-1}. Ist $n \in \mathbb{N}$, so ist T_n ein Verbandsisomorphismus auf E_n mit strikter Periode n, T_∞ ist ein aperiodischer Verbandsisomorphismus auf E_∞. (Natürlich kann $E_n = o$ sein für gewisse $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.)

Man sieht leicht, daß $M \subset \{1, \ldots, n\}$ ist, wenn $T^n \in Z(E)$. Sei $Z(E) = C(X)$. Es gibt offen-abgeschlossene Teilmengen A_n von X, so daß $P_n = 1_{A_n}$ gilt für $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

Lemma 4.12 zeigt, daß gilt:

$$A_1 = \{s \in X \mid \varphi_T(s) = s\},$$

$$A_n = \{s \in X \mid \varphi_T{}^n(s) = s;\ \varphi_T^m(s) \neq s \text{ für } 1 \leq m < n\},$$

$$n \in \mathbb{N},\ n \geq 2,$$

$$A_\infty = X \setminus \overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n} = \{s \in X \mid \varphi_T{}^n(s) \neq s \text{ für alle } n \in \mathbb{N}\}^\circ .$$

Zunächst wollen wir das Spektrum der Komponente mit strikter Periode n ($n \in \mathbb{N}$) bestimmen. Zuvor zwei Lemmata.

4.15 Lemma. Sei φ ein Homöomorphismus mit strikter Periode n ($n \in \mathbb{N}$) auf einem kompakten, stoneschen Raum X. Dann existiert eine offen-abgeschlossene Teilmenge A von X, so daß

$$A \cap \varphi^m(A) = \emptyset \quad (1 \leq m \leq n-1),$$

$$\bigcup_{m=o}^{n-1} \varphi^m(A) = X.$$

Beweis. Sei $\mathfrak{M} = \{O \subset X \text{ offen} \mid O \cap \varphi^m(O) = \emptyset \text{ für } 1 \leq m \leq n-1\}$. Es ist $\mathfrak{M} \neq o$, da $\emptyset \in \mathfrak{M}$. Man sieht leicht, daß $\mathfrak{M}$ bzgl. der Inklusion induktiv geordnet ist. Nach dem Lemma von Zorn existiert ein maximales Element A von $\mathfrak{M}$. Da X stonesch ist, ist A abgeschlossen. Angenommen, es ist $Y := X \setminus \bigcup_{m=o}^{n-1} \varphi^m(A) \neq \emptyset$. Da φ die strikte Periode n hat, gibt es dann $O \subset Y$ offen, $O \neq \emptyset$, so daß $\varphi^m(O) \cap O = \emptyset$ für $1 \leq m \leq n-1$. Dann aber ist $A \cup O \in \mathfrak{M}$ im Widerspruch zur Maximalität von A.

4.16 Lemma. Sei X ein kompakter stonescher Raum und φ ein Homöomorphimus auf X mit strikter Periode n ($n \in \mathbb{N}$). Sei α eine n-te Einheitswurzel. Dann gibt es ein $g \in C(X)$ mit $|g| = 1_X$, so daß $g \circ \varphi = \alpha g$.

Beweis. Sei A die Menge aus 4.15. Setze $g = \sum_{m=o}^{n-1} \alpha^m 1_{\varphi^m(A)}$.

4.17 Satz. Sei E ein ordnungsvollständiger Banachverband und T ein Verbandsisomorphismus auf E mit strikter Periode n ($n \in \mathbb{N}$). Dann gilt:

a) $\sigma(T)$ ist rotationssymmetrisch der Ordnung n.

b) $\sigma(T) = \sigma_o(T)$.

c) $r(T) = ||T^n||^{1/n}$.

d) Es gibt paarweise orthogonale Projektionsbänder J_m ($m=o..n-1$), so daß $E = J_o \oplus \ldots \oplus J_{n-1}$ und $TJ_m = J_{m+1}$ (m mod n).

Beweis. a) Sei $Z(E) = C(X)$, φ_T der zu T gehörende Homöomorphismus. Nach 4.13 und 4.16 existiert $g \in C(X)$ mit $|g| = 1_X$, so daß $g \circ \varphi_T = \alpha g$. Daher ist $g^{-1}Tg = g^{-1}TgT^{-1}T = g^{-1}g \circ \varphi_T T = \alpha T$, also $\sigma(T) = \alpha\sigma(T)$.
b) Sei $\lambda \in \sigma_o(T)$. Dann ist $\lambda = \alpha|\lambda|$ mit $\alpha^n = 1$, da $\sigma_o(T)^n = \sigma_o(T^n) = \sigma(T^n) \subset \mathbb{R}_+$. Nach 4.4 ist $|\lambda| \in \sigma(T)$; aus a) folgt $\lambda \in \sigma(T)$.
c) Da $T^n \in Z(E)$, folgt aus 1.8 $r(T) = r(T^n)^{1/n} = ||T^n||^{1/n}$.
d) Sei $A \subset X$ die Menge aus 4.15. Setze $J_m = 1_{\varphi_T^{-m}(A)}E$ ($o \leq m \leq n-1$). Dann gilt $J_o \oplus .. \oplus J_{n-1} = E$, da $\bigcup_{m=o}^{n-1} \varphi_T^{-m}(A) = X$, und es ist
$TJ_m = T1_{\varphi_T^{-m}(A)}T^{-1}TE = (1_{\varphi_T^{-m}(A)} \circ \varphi_T)TE = 1_{\varphi_T^{-(m+1)}(A)}E = J_{m+1}$
(m mod n), womit d) bewiesen ist.

Sei T ein Verbandsisomorphismus auf einem ordnungsvollständigen Banachverband E, $\{(T_n,E_n) \mid n \in M\}$ seine kanonische Zerlegung (4.14).
Sei $T_\infty^\perp = T_{|E_\infty^\perp}$. Dann ist $\sigma(T) = \sigma(T_\infty) \cup \sigma(T_\infty^\perp)$ und $\sigma_o(T) = \sigma_o(T_\infty) \cup \sigma_o(T_\infty^\perp)$, falls $E_\infty \neq o$ und $E_\infty^\perp \neq 0$.
Man kann also die Spektren von T_∞ und $T_\infty^\perp$ getrennt untersuchen. Der nächste Satz macht eine Aussage über $\sigma(T_\infty^\perp)$.
Sei $T_n^\perp$ die Einschränkung von T auf das Band $F_n := (E_1 + \ldots + E_n)^\perp \cap E_\infty^\perp$ $(n \in \mathbb{N})$.

4.18 Satz. Sei E ein ordnungsvollständiger Banachverband und T ein Verbandsisomorphismus auf E mit aperiodischer Komponente $T_\infty = o$.
Sei $\{(T_n,E_n) \mid n \in M\}$ die kanonische Zerlegung von T.
Ist M endlich, so ist $\sigma(T) = \bigcup_{n\in M} \sigma(T_n)$.
Ist M unendlich, so ist

$$\sigma(T) = \bigcup_{n\in M} \sigma(T_n) \cup \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \sigma(T_n^\perp)$$ und

die Menge $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \sigma(T_n^\perp)$ ist rotationsinvariant der Ordnung ∞.

Beweis. Die Behauptung ist klar, wenn M endlich ist.

Sei M unendlich. Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist

$\sigma(T) = \bigcup_{\substack{m \in M \\ m \leq n}} \sigma(T_m) \cup \sigma(T_n^{\perp})$. Daraus ergibt sich der

Ausdruck für $\sigma(T)$. Sei $K = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \sigma(T_n^{\perp})$.

Es bleibt zu zeigen, daß K rotationssymmetrisch der Ordnung ∞ ist.

Ist $\lambda \in K$, so ist $|\lambda| \in K$, da $T_n^{\perp}$ ein Verbandsisomorphismus ist für alle $n \in \mathbb{N}$.

Angenommen, es gibt $s \in K \cap \mathbb{R}_+$ und $\alpha \in \Gamma$, so daß $s\alpha \notin K$. Dann gibt es ein $m_o \in M$, so daß $s\alpha \notin \sigma(T_{m_o}^{\perp})$.

Sei $\varepsilon > o$. Es gibt ein $m_1 \geq m_o$, $m_1 \in M$, so daß für alle $\beta \in \Gamma$ und alle $m \in \mathbb{N}$ mit $m \geq m_1$ ein $\beta_m \in \Gamma$ mit $\beta_m^m = 1$ existiert, so daß $|\beta_m - \beta| < \varepsilon/2||T||$.

Da $\sigma(T_{m_1}^{\perp}) \subset \sigma(T_{m_o}^{\perp})$ ist, ist $\Gamma_s \not\subset \sigma(T_{m_1}^{\perp})$ ($\Gamma_s = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = s\}$). Somit gibt es $\lambda \in \partial\sigma(T_{m_1}^{\perp}) \subset A\sigma(T_{m_1}^{\perp})$ mit $|\lambda| = s$.

Setze $\beta = \alpha s/\lambda$. Sei für $m \in M$, $m \geq m_1$, $\beta_m \in \Gamma$ mit $\beta_m^m = 1$, so daß $|\beta - \beta_m| < \varepsilon/2||T||$.

Sei $Z(E) = C(X)$. Sei $A_m \subset X$ offen-abgeschlossen, so daß 1_{A_m} die Bandprojektion auf E_m ist ($m \in M$).

Da $\varphi_{T|A_m}$ für jedes $m \in M$ die strikte Periode m hat, gibt es nach 4.16 für jedes $m \in M$ ein $g_m \in C(A_m)$, $|g_m| = 1_{A_m}$, so daß $g_m(\varphi_T(s)) = \beta_m\, g_m(s)$ für alle $s \in A_m$.

Da X stonesch ist und $\overline{\bigcup_{m \in M} A_m} = X$, gibt es $g \in C(X)$ mit $g(s) = g_m(s)$ für alle $s \in A_m$ ($m \in M$). Es ist $|g| = 1_X$.

Da $\lambda \in A\sigma(T^{\perp}_{m_1})$ ist, gibt es ein $x \in F_{m_1}$ mit $||x|| = 1$, so daß $||\lambda x - T^{\perp}_{m_1} x|| < \varepsilon/2$.

Setze $y = gx$. Es ist $|y| = |gx| = |x|$, und daher $||y|| = 1$. Nun gilt:

$$\begin{aligned}
||\alpha s y - T^{\perp}_{m_o} y|| &= ||\beta\lambda g x - T(gx)|| \\
&\leq ||\beta g(\lambda x - Tx)|| + ||\beta g T x - T(gx)|| \\
&\leq \quad \varepsilon/2 \quad + ||\beta g T x - T g T^{-1} T x|| \\
&= \quad \varepsilon/2 \quad + ||(\beta g - g \circ \varphi_T) T x|| \leq \varepsilon, \text{ denn es ist}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
||(\beta g - g \circ \varphi_T) T x|| &= ||(\beta g - g \circ \varphi_T) 1_B T x|| \qquad (B = \overline{\bigcup_{\substack{m \in M \\ m > m_1}} A_m}) \\
&\leq \sup_{\substack{m \in M \\ m > m_1}} \sup_{s \in A_m} |\beta g(s) - g(\varphi_T(s))| \, ||T|| \\
&\leq \sup_{m > m_1} |\beta - \beta_m| \, ||T|| \leq \varepsilon/2.
\end{aligned}$$

Da $\varepsilon > o$ beliebig war, ist $\alpha s \in A\sigma(T^{\perp}_{m_o})$, Widerspruch!

4.19 Korollar. Sei E ein ordnungsvollständiger Banachverband und T ein Verbandsisomorphismus auf E mit aperiodischer Komponente $T_\infty = o$.

Dann gilt $\sigma(T) = \sigma_o(T)$.

Beweis. Sei $\{(T_n, E_n) \mid n \in M\}$ die kanonische Zerlegung von T.

1.Fall: M ist endlich. Dann ist

$$\sigma_o(T) = \bigcup_{n \in M} \sigma_o(T_n) = \bigcup_{n \in M} \sigma(T_n) = \sigma(T) \quad \text{nach 4.17b).}$$

2.Fall: M ist unendlich. Sei $\lambda \notin \sigma(T)$. Dann gibt es nach 4.18 ein $n_o \in M$, so daß $|\lambda| \notin \sigma(T^{\perp}_{n_o})$. Daher ist nach 4.4 $\lambda \notin \sigma_o(T^{\perp}_{n_o})$. Da wegen 4.17b)

$$\sigma_o(T) = \bigcup_{\substack{n \in M \\ n \leq n_o}} \sigma_o(T_n) \cup \sigma_o(T^{\perp}_{n_o}) = \bigcup_{\substack{n \in M \\ n \leq n_o}} \sigma(T_n) \cup \sigma_o(T^{\perp}_{n_o}),$$

ist $\lambda \notin \sigma_o(T)$.

4.2o Beispiel. Ist T ein Verbandsisomorphismus mit aperiodischer Komponente $T_\infty = o$, so ist i.a. $\sigma(T)$ echt größer als $\overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \sigma(T_n)}$.

Wir konstruieren ein Beispiel.

Sei I eine Menge, $\varphi : I \to I$ eine bijektive Abbildung, $k \in l^\infty(I)$ sei strikt positiv (d.h. es ist $k(i) \geq \varepsilon > o$ für alle $i \in I$). Dann wird durch

$Tf = k\, f \circ \varphi$ für $f \in l^p(I)$

ein Verbandsisomorphismus T auf $E = l^p(I)$ $(1 \leq p \leq \infty)$ definiert. Es ist $\|T\| = \|k\|_\infty$ und T^{-1} ist gegeben durch $T^{-1}f = 1/(k \circ \varphi^{-1})\, f \circ \varphi^{-1}$ für alle $f \in E$.

Sei $I = \{(2n,l) \mid n \in \mathbb{N},\ 1 \leq l \leq 2n\} \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ und $E = l^p(I)$ $(1 \leq p \leq \infty)$. φ: $I \to I$ sei definiert durch

$\varphi(2n,l) = (2n,l+1)$ für $1 \leq l < 2n$, und

$\varphi(2n,2n) = (2n,1)$ $(n \in \mathbb{N})$.

Sei $h \in l^\infty(I)$ definiert durch

$h(2n,l) = 1$ für $l \leq n$, und

$h(2n,l) = 1/2$ für $l > n$ $(n \in \mathbb{N})$.

T sei der durch $Tf = h\, f \circ \varphi$ für $f \in E$ definierte Verbandsisomorphismus. Sei $\{(T_n, E_n) \mid n \in M\}$ die kanonische Zerlegung von T. Es ist $M = \{2n \mid n \in \mathbb{N}\}$ und

$E_{2n} = \{f \in l^p(I) \mid f(2m,l) = o$ für alle $m \neq n\}$ $(n \in \mathbb{N})$

Da $T_{2n}^{2n} \in Z(E_{2n})$ ist, ist $r(T_{2n}) = ||T_{2n}^{2n}||^{1/2n}$ nach 4.17.

Es ist $T^m f = h \cdot h \circ \varphi \cdot \ldots \cdot h \circ \varphi^{m-1} \cdot f$ $(f \in E)$ für $m \in \mathbb{N}$.

Sei $I_{2n} = \{(2n,l) \mid l = 1, \ldots, 2n\}$. Es ist

$||T_{2n}^{2n}|| = ||h \cdot h \circ \varphi \ldots h \circ \varphi^{2n-1}{}_{|I_{2n}}||_\infty$

Für $1 \leq l \leq 2n$ ist

$(h \cdot h \circ \varphi \ldots h \circ \varphi^{2n-1})(2n,l) = (1/2)^n$, somit ist

$r(T_{2n}) = ||T_{2n}^{2n}||^{1/2n} = (1/2)^{1/2} = 1/\sqrt{2}$.

Ganz analog ist

$||(T_{2n}^{-1})^{2n}|| = ||1/(h \circ \varphi^{-1} \ldots h \circ \varphi^{-2n} \cdot h)_{|I_{2n}}||_\infty = 2^n$.

Somit ist $r(T_{2n}^{-1}) = \sqrt{2}$, also $r(T_{2n}^{-1})^{-1} = 1/\sqrt{2}$.

Damit ist $\sigma(T_{2n}) \subset \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1/\sqrt{2}\}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Jedoch ist für $m \in \mathbb{N}$

$$||T^m|| = \sup \{|(h \cdot h \circ \varphi \ldots h \circ \varphi^{m-1})(2n,l)| \mid n \in \mathbb{N},\ 1 \leq l \leq 2n\}$$
$$\geq |(h \cdot \ldots \cdot h \circ \varphi^{m-1})(2m,1)| = 1.$$

Also ist $r(T) \geq 1$. Wir haben also, daß

$$\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1/\sqrt{2}\} = \overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \sigma(T_n)} \neq \sigma(T) \text{ ist.}$$

Es sollen nun aperiodische Verbandsisomorphismen untersucht werden. Das sind gerade die Verbandsisomorphismen, die disjunkte Potenzen haben. Nach Definition 4.9 ist nämlich $I \wedge T^n = o$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Somit ist für $m,n \in \mathbb{Z}$, $m \neq n$, $T^m \wedge T^n = o$ (sei z.B. $m > n$, dann ist $T^m \wedge T^n = (T^{m-n} \wedge I)T^n = o$ nach 1.19).

4.21 Satz. Sei T ein bandirreduzibler Verbandsisomorphismus auf einem ordnungsvollständigen Banachverband E. Dann gilt:

Entweder ist T aperiodisch oder E ist endlichdimensional.

Ist $\dim E = n$, so gibt es eine Vektorraumbasis $\{e_o, \ldots , e_{n-1}\}$ von E mit $e_k \wedge e_l = o$ für $k \neq l$, so daß

$Te_m = e_{m+1}$ für $m = o,\ldots,n-2$ und

$Te_{n-1} = c \cdot e_o$ für ein $c > o$.

Beweis. Sei $E \neq o$. Ist T nicht aperiodisch, so hat T die strikte Periode n für ein $n \in \mathbb{N}$. Sei $Z(E) = C(X)$ und φ_T der zu T assoziierte Homöomorphismus auf X. Nach 4.15 gibt es $A \subset X$ offen-abgeschlossen, so daß $A \cap \varphi_T^m(A) = \emptyset$ für $m = 1,\ldots,n-1$ und $\bigcup_{m=o}^{n-1} \varphi_T^m(A) = X$. A enthält genau ein Element. (Angenommen, A enthält mehr als ein Element. Dann gibt es eine offen-abgeschlossene Teilmenge B von A, $B \neq \emptyset, A$. Sei $Y = \bigcup_{m=o}^{n-1} \varphi_T^m(B)$. Dann ist Y eine echte, nicht leere offen-abgeschlossene

Teilmenge von X mit $\varphi_T(Y) = Y$. Somit wird T von $P = 1_Y$ reduziert, obwohl $P \neq o, I$ ist, Widerspruch!)

Sei also $A = \{t_o\}$. Setze $t_m = \varphi_T^{-m}(t_o)$ $(m=1,\dots,n-1)$. Dann ist $X = \{t_o,\dots,t_{n-1}\}$. Sei $P_m = 1_{\{t_m\}}$, $J_m = P_mE$ $(m=o,\dots,n-1)$. Dann ist $E = J_o \oplus\dots\oplus J_{n-1}$ und es ist $\dim J_m = 1$ (1.15). Da $1_{\{t_m\}}\varphi_T = 1_{\{t_{m+1}\}}$ (m mod n), ist $TP_mT^{-1} = P_{m+1}$, und somit

$TJ_m = TP_mE = P_{m+1}TE = J_{m+1}$ (m mod n).

Sei $e_o \in J_o$, $e_o > o$. Setze $e_m = T^m e_o$, $m=1\dots n-1$. Dann ist $\{e_o,\dots,e_{n-1}\}$ eine Basis von E, die die Behauptung erfüllt.

4.22 Lemma. Sei φ ein Homöomorphimus auf einem kompakten stoneschen Raum X, so daß eine offen-abgeschlossene Teilmenge A von X existiert, derart daß

$\varphi^m(A) \cap A = \emptyset$ für alle $m \in \mathbb{N}$ und

$$\overline{\bigcup_{m\in\mathbb{Z}} \varphi^m(A)} = X.$$

Dann gibt es zu jedem $\alpha\in\mathbb{C}$ mit $|\alpha| = 1$ ein $f \in C(X)$ mit $|f| = 1_X$, so daß $f\circ\varphi = \alpha f$.

Beweis. Sei $|\alpha| = 1$. Setze $B = \bigcup_{m\in\mathbb{Z}} \varphi^m(A)$. Definiere die stetige, beschränkte Funktion g auf B durch $g(s) = \alpha^m$, falls $s \in \varphi^m(A)$ $(s \in B)$. Da $\overline{B} = X$ die Stone-Čech-Kompaktifizierung von B ist, besitzt g eine stetige Fortsetzung f auf X, die die Bedingungen erfüllt.

4.23 Lemma. <u>Sei</u> T <u>ein Verbandsisomorphismus auf einem ordnungsvollständigen Banachverband</u> E. <u>Es gebe ein Band</u> J <u>in</u> E, <u>so daß gilt</u>

$T^mJ \subset J^\perp$ <u>für alle</u> $m \in \mathbb{N}$ <u>und</u> $(\bigcup_{m\in\mathbb{Z}} T^mJ)^\perp = o.$

<u>Dann ist</u> $\sigma(T)$ <u>rotationssymmetrisch der Ordnung</u> ∞.

Beweis. Sei $P = 1_A$ die zu J gehörende Bandprojektion ($1_A \in C(X) = Z(E)$). Nach Voraussetzung gilt $PT^m \wedge T^mP = o$ für alle $m \in \mathbb{N}$. Daher ist auch $T^{-m}PT^m \wedge P = T^{-m}(PT^m \wedge T^mP) = o$ für alle $m \in \mathbb{N}$ (1.19). D.h. es ist $\varphi_T^m(A) \cap A = \emptyset$. Nach 4.22 gibt es zu jedem $\alpha \in \mathbb{C}$, $|\alpha| = 1$, ein $f \in C(X)$ mit $|f| = 1_X$, so daß $f \circ \varphi_T = \alpha f$. Daher ist $f^{-1}Tf = f^{-1}TfT^{-1}T = f^{-1}f \circ \varphi_T\, T = \alpha T$. Also ist $\sigma(T) = \sigma(f^{-1}Tf) = \alpha\sigma(T)$.

4.24 Satz. <u>Sei</u> E <u>ein atomarer ordnungsvollständiger Banachverband und</u> T <u>ein aperiodischer Verbandsisomorphismus auf</u> E.

$\sigma(T)$ <u>ist rotationssymmetrisch der Ordnung</u> ∞.

Beweis. Sei $\{e_i \mid i \in I\}$ ein maximales Orthogonalsystem von Atomen, $||e_i|| = 1$ ($i \in I$). Da T Atome in Atome abbildet, gibt es eine bijektive Abbildung $\varphi : I \to I$

und ein $h \in l^{\infty}(I)_{+}$, so daß $Te_i = h_i\, e_{\varphi^{-1}(i)}$ $(i \in I)$. Durch $i \sim j \Leftrightarrow i \in \{\varphi^m(j) \mid m \in \mathbb{Z}\}$ wird eine Äquivalenzrelation auf I definiert. Sei $I_o \subset I$ eine Menge, so daß es für alle $i \in I$ genau ein $i_o \in I_o$ gibt mit $i \sim i_o$. Das von $\{e_i \mid i \in I_o\}$ erzeugte Band erfüllt die Voraussetzungen von 4.23.

4.25 Theorem. <u>Sei</u> T <u>ein</u> <u>Verbandsisomorphismus</u> <u>auf</u> <u>einem</u> <u>ordnungsvollständigen</u> <u>atomaren</u> <u>Banachverband</u>. <u>Es gilt</u> $\sigma(T) = \sigma_o(T)$.

Beweis. 1. Ist $T = T_\infty$, so folgt die Behauptung aus 4.24. Sei nämlich $\lambda \in \sigma_o(T)$. Nach 4.4 ist $|\lambda| \in \sigma(T)$ und nach 4.24 dann $\lambda \in \sigma(T)$.

2. Für $T = T_\infty^\perp$ ist $\sigma(T) = \sigma_o(T)$ nach 4.19.

3. Ist $T_\infty \neq o$ und $T_\infty^\perp \neq o$, so ist

$$\sigma(T) = \sigma(T_\infty) \cup \sigma(T_\infty^\perp) = \sigma_o(T_\infty) \cup \sigma_o(T_\infty^\perp) = \sigma_o(T)$$

nach 1. und 2.

4.26 Satz. <u>Sei</u> T <u>ein</u> <u>aperiodischer</u> <u>Verbandsisomorphismus</u> <u>auf</u> <u>einem</u> <u>ordnungsvollständigen</u> <u>Banachverband</u>. $\sigma_o(T)$ <u>ist</u> <u>rotationssymmetrisch</u> <u>der</u> <u>Ordnung</u> ∞.

Beweis. Wir bezeichnen mit A das von $\{T^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ in $\mathcal{L}^r(E)$ erzeugte Band. Nach 1.22 ist A eine volle Unteralgebra von $\mathcal{L}^r(E)$. Sei $L:A \to A$ definiert durch $L(S) = TS$ für alle $S \in A$. J bezeichne das von T in A erzeugte Band. L ist ein Verbandsisomorphismus auf A, der bzgl. dem Band J die Voraussetzungen von 4.23 erfüllt. Somit ist $\sigma_o(T) = \sigma_A(T) = \sigma(L)$ rotationssymmetrisch der Ordnung ∞.

4.26 in Verbindung mit 4.3 impliziert insbesondere, daß ein bandirreduzibler Verbandsisomorphismus auf einem ordnungsvollständigen Banachverband E ($\dim E = \infty$) den Kreisring $\{z \in \mathbb{C} \mid r(T^{-1})^{-1} \leq |z| \leq r(T)\}$ als Ordnungsspektrum hat.

Da für die im folgenden Korollar genannten Räume $\mathcal{L}(E)$ mit $\mathcal{L}^r(E)$ übereinstimmt (Schaefer (1974) IV 1.8), erhält man:

4.27 Korollar. Sei E ein Raum vom Typ C(X), X kompakt und stonesch, oder vom Typ $L^1(X,\Sigma,\mu)$.

a) Ist T ein aperiodischer Verbandsisomorphismus auf E, so ist $\sigma(T)$ rotationssymmetrisch der Ordnung ∞.

b) Ist T ein bandirreduzibler Verbandsisomorphimus auf E und E unendlich-dimensional, so ist $\sigma(T) = \{z \in \mathbb{C} \mid r(T^{-1})^{-1} \leq |z| \leq r(T)\}$.

Wir wollen im folgenden einige Anwendungen diskutieren. Als erstes untersuchen wir Verbandsisomorphismen auf Räumen vom Typ $C(X)$.

Sei X ein kompakter Raum. Jeder Verbandsisomorphismus T auf $C(X)$ hat die Form

$$Tf = h \cdot f \circ \varphi \qquad (f \in C(X)),$$

wobei φ ein Homöomorphismus auf X und $h \in C(X)$ strikt positiv ist (d.h. $h(s) > 0$ für alle $s \in X$).

Sei T, definiert durch φ und h, für das Folgende fest vorgegeben.

Wir setzen $h_n = (h \cdot h \circ \varphi \cdot \ldots \cdot h \circ \varphi^{n-1})^{1/n} \quad (n \in \mathbb{N})$.

4.28 Lemma. 1. <u>Für die Spektralradien von</u> T <u>und</u> T^{-1} <u>gilt</u>:

$$r(T) = \lim_{n\to\infty} \sup_{s\in X} h_n(s)$$

$$r(T^{-1})^{-1} = \lim_{n\to\infty} \inf_{s\in X} h_n(s).$$

2. $\sigma(T) \cap \mathbb{R}_+ = \{r \in \mathbb{R}_+ \mid \forall\, \varepsilon>0 \ \forall\, m\in\mathbb{N} \ \exists\, l\geq m,$ <u>so daß</u> $h_l(X) \cap (r-\varepsilon, r+\varepsilon) \neq \emptyset\}.$

Beweis. 1. Die Formeln ergeben sich leicht aus der Formel für den Spektralradius.

2. Sei M die in der Behauptung genannte Menge.

Es gilt $\sigma(T) \cap \mathbb{R}_+ \subset M$.

Sei nämlich $r \notin M$, $r > 0$. Dann existiert $\varepsilon > 0$ und $n_0 \in \mathbb{N}$, so daß für alle $m \geq n_o$ $h_m(X) \cap [r-\varepsilon, r+\varepsilon] = \emptyset$.

Sei $n \geq n_o$ so groß, daß

$$(r-\varepsilon)[(\max_{t\in X} h(t))/(\min_{t\in X} h(t))]^{1/n} < r \quad \text{und}$$

$$(r+\varepsilon)[(\min_{t\in X} h(t))/(\max_{t\in X} h(t))]^{1/n} > r.$$

Sei $X_1 = \{t \in X \mid h_n(t) \leq r-\varepsilon\} = \{t \in X \mid h_n(t) < r\}$

$X_2 = \{t \in X \mid h_n(t) \geq r+\varepsilon\} = \{t \in X \mid h_n(t) > r\}$.

Da h_n stetig ist, sind X_1, X_2 offen-abgeschlossen.

Es gilt: $X = X_1 \cup X_2$, $X_1 \cap X_2 = \emptyset$.

Ferner ist $\varphi(X_i) \subset X_i$ $(i=1,2)$.

(Sei nämlich $t \in X$. Dann ist

$$h_n(\varphi(t)) = [h(\varphi(t))\cdot\ldots\cdot h(\varphi^n(t))]^{1/n}$$
$$= h_n(t)\cdot[h(\varphi^n(t))/h(t)]^{1/n}.$$

Somit ist $h_n(\varphi(t)) < r$, wenn $t \in X_1$ und

$h_n(\varphi(t)) > r$, wenn $t \in X_2$ nach Bestimmung von n.

Also ist $\varphi(t) \in X_i$, wenn $t \in X_i$ $(i=1,2)$.)

Das Projektionsband $I_1 = \{f \in C(X) \mid f(t) = o \text{ für alle } t \in X_2\}$ ist isomorph zu $C(X_1)$ und invariant unter T und T^{-1}, genauso wie $I_2 = I_1^{\perp}$. Sei $T_i = T_{|I_i}$ $(i=1,2)$.

Dann ist $r(T_1) \leq r-\varepsilon$ und $r(T_2^{-1})^{-1} \geq r+\varepsilon$ nach 1 und der Definition von X_1 und X_2 (es ist nämlich

$r(T_1) \leq ||T_1^n||^{1/n} = ||h_{n|X_1}||_\infty \leq r-\varepsilon$, ähnlich ist

$r(T_2^{-1})^{-1} \geq \inf_{t\in X_2} h_n(t) \geq r+\varepsilon$).

Somit ist $r \notin \sigma(T_1) \cup \sigma(T_2) = \sigma(T)$.

Sei umgekehrt $r \notin \sigma(T) \cap R_+$. Ferner sei $r(T^{-1})^{-1} < r < r(T)$

(sonst folgt $r \notin M$ aus 1.). Nach 4.1 gibt es ein

unter T und T^{-1} invariantes Projektionsband I, so daß für $T_1 = T_{|I}$ und $T_2 = T_{|I^\perp}$ gilt:
$r(T_1) < r < r(T_2^{-1})^{-1}$. Es gibt eine offen-abgeschlossene Teilmenge X_1 von X, so daß

$I = \{f \in C(X) \mid f(t) = o \text{ für alle } t \notin X_1\}$.

Sei $X_2 = X \setminus X_1$. Dann ist

$I^\perp = \{f \in C(X) \mid f(t) = o \text{ für alle } t \notin X_2\}$.

Es ist nach 1.

$r(T_1) = \lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{t\in X_1} h_n(t) < r$ und

$r(T_2^{-1})^{-1} = \lim\limits_{n\to\infty} \inf\limits_{t\in X_2} h_n(t) > r$.

Sei $o < \varepsilon < \min \{r(T_2^{-1})-r, r-r(T_1)\}$. Dann gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, so daß für alle $m \geq n$ gilt

$\sup\limits_{t\in X_1} h_m(t) < r-\varepsilon$ und $\inf\limits_{t\in X_2} h_m(t) > r+\varepsilon$.

Damit ist $h_m(X) \cap (r-\varepsilon, r+\varepsilon) = \emptyset$ für alle $m \geq n$, also ist $r \notin M$.

4.29 Satz. a) Hat T (äquivalent φ) die strikte Periode n ($n \in \mathbb{N}$), so ist

$\sigma(T) = \{(e^{2\pi ik/n})h_n(t) \mid t \in X, k=o\ldots n-1\}$.

b) Ist T (äquivalent φ) aperiodisch, so ist $\sigma(T)$ rotationssymmetrisch der Ordnung ∞.

Beweis. Es gibt einen kompakten stoneschen Raum Y, so daß $C(X)'' = C(Y)$. Sei $Q: C(X) \to C(Y)$ die kanonische Einbettung. Es gibt eine surjektive stetige Abbildung $q: Y \to X$, so daß $Qf = f\circ q$ für alle $f \in C(X)$.

Setze $S = T''$. Es gibt ein strikt positives $k \in C(Y)$ und einen Homöomorphismus ψ auf Y, so daß $Sg = k\cdot g\circ\psi$ für alle $g \in C(Y)$. Man prüft leicht nach, daß gilt:

$k_n = h_n \circ q$ und $\varphi^n \circ q = q\circ\psi^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ $(k_n = (k\cdot k\circ\psi \ldots \cdot k\circ\psi^{n-1})^{1/n}$.

Setze: $X_1 = \{s \in X \mid \varphi(s) = s\}$, $\quad Y_1 = \{t\in Y \mid \psi(t) = t\}$,

$X_{n+1} = \{s\in X \mid \varphi^{n+1}(s) = s\} \setminus (X_1 \cup .. \cup X_n)$,

$Y_{n+1} = \{t\in Y \mid \psi^{n+1}(t) = t\} \setminus (Y_1 \cup .. \cup Y_n)$ $\quad (n \in \mathbb{N})$,

$I_n = \{f\in C(X) \mid f(s) = o \text{ für alle } s\notin X_n\}$,

$J_n = \{g\in C(Y) \mid g(t) = o \text{ für alle } t\notin Y_n\}$,

$T_n = T_{|I_n}$; $S_n = S_{|J_n}$ $\quad (n \in \mathbb{N})$.

Man sieht leicht, daß $q(Y_n) \subset (X_1 \cup \ldots \cup X_n)$ $(n \in \mathbb{N})$ $\qquad (*)$.

a) T habe die strikte Periode n.

1. Wir zeigen, daß $\sigma(T)$ rotationssymmetrisch der Ordnung n ist. Nach 4.17 ist $\sigma(S_n)$ rotationssymmetrisch der Ordnung n. Da $\sigma(S_n) \subset \sigma(T)$ ist, reicht es zu zeigen, daß $\sigma(T) \cap \mathbb{R}_+ \subset \sigma(S_n)$ gilt.

Sei $r \in \sigma(T) \cap \mathbb{R}_+$. Sei $\varepsilon > o$, $m \in \mathbb{N}$. Dann gibt es $l > m$, so daß $h_l^{-1}(r-\varepsilon, r+\varepsilon) \neq \emptyset$. Aus der Voraussetzung folgt, daß X_n dicht in X ist. Also ist $h_l^{-1}(r-\varepsilon, r+\varepsilon) \cap X_n \neq \emptyset$.

Da q surjektiv ist, gilt auch

$\emptyset \neq q^{-1}h_l^{-1}(r-\varepsilon, r+\varepsilon) \cap q^{-1}(X_n) \subset k_l^{-1}(r-\varepsilon, r+\varepsilon) \cap Y_n$

(beachte $(*)$). Da $\varepsilon > o$, $m\in\mathbb{N}$ beliebig waren, ist $r \in \sigma(S_n)$.

2. Die in der Behauptung unter a) angegebene Identität ergibt sich aus 1. so: Da $|\lambda| \in \sigma(T)$ ist, wenn $\lambda \in \sigma(T)$ ist, ist $\sigma(T) \cap \mathbb{R}_+ = \{\lambda > o \mid \lambda^n \in \sigma(T^n)\}$. Es ist $T^n \in Z(C(X))$ mit $T^n f = h_n^n \cdot f$ für alle $f \in C(X)$. Also ist $\sigma(T^n) = h_n^n(X)$. Daraus folgt $\sigma(T) \cap \mathbb{R}_+ = h_n(X)$.

b) Sei T aperiodisch.

Setze $S_n^\perp = S_{|L_n}$ mit $L_n = \{g \in C(Y) \mid g(t)=o \text{ für } t \notin Z_n\}$, $Z_n = Y \setminus (Y_1 \cup .. \cup Y_n)$ $(n \in \mathbb{N})$ (vgl. die Definition vor 4.18). Die Menge $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} (S_n^\perp)$ ist rotationssymmetrisch der Ordnung ∞ (4.18) und in $\sigma(T) = \sigma(S)$ enthalten. Es reicht also zu zeigen, daß $\sigma(T) \cap \mathbb{R}_+ \subset \sigma(S_n^\perp)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Sei also $r \in \sigma(T) \cap \mathbb{R}_+$ und $n \in \mathbb{N}$. Sei $\varepsilon > o$, $m \in \mathbb{N}$. Dann gibt es ein $l > m$, so daß $h_l^{-1}(r-\varepsilon, r+\varepsilon) \neq \emptyset$. Aus der Voraussetzung folgt, daß $W := X \setminus (X_1 \cup .. \cup X_n)$ dicht in X liegt. Somit ist $W \cap h_l^{-1}(r-\varepsilon, r+\varepsilon) \neq \emptyset$. Also ist $\emptyset \neq q^{-1}(W) \cap q^{-1}h_l^{-1}(r-\varepsilon, r+\varepsilon) \subset Z_n \cap k_l^{-1}(r-\varepsilon, r+\varepsilon)$ (beachte (*)). Da $\varepsilon > o$, $m \in \mathbb{N}$ beliebig waren, folgt aus 4.28, daß $r \in \sigma(S_n^\perp)$.

Im obigen Satz ist $\sigma(T)$ schon durch die Menge $\sigma(T) \cap \mathbb{R}_+$ bestimmt. Der in 4.28 gegebene Ausdruck für diese Menge läßt sich vereinfachen, wenn es ein $k \in C(X)$ gibt, so daß $(h_l)_{l\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen k konvergiert. Dann nämlich ist $\sigma(T) \cap \mathbb{R}_+ = k(X)$, wie man leicht sieht.

Ist $\sigma(T) \cap \mathbb{R}_+ = \{r\}$ (d.h. $\sigma(T)$ liegt auf dem Kreis um o mit dem Radius r), so konvergiert $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen $r1_X$. (Angenommen, das ist nicht der Fall. Dann gibt es $\varepsilon > 0$ und eine Folge $(n_m)_{m\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{N}$ mit $n_m < n_{m+1}$ $(m\in\mathbb{N})$ und eine Folge $(s_m)_{m\in\mathbb{N}}$ in X, so daß für alle $m\in\mathbb{N}$ $|h_{n_m}(s_m) - r| > \varepsilon$. Sei c ein Häufungspunkt von $(h_{n_m}(s_m))_{m\in\mathbb{N}}$. Dann ist $c \in \sigma(T) \cap \mathbb{R}_+$ nach 4.28, aber $r \neq c$, Widerspruch).

Wir setzen für $f \in C(X)$ $\quad M_n f = 1/n \sum_{m=0}^{n-1} f \circ \varphi^m \quad (n \in \mathbb{N})$.

φ heißt <u>eindeutig ergodisch</u>, wenn für alle $f\in C(X)$ die Folge $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen eine konstante Funktion konvergiert (siehe Walters (1975)). Man sieht leicht, daß ein eindeutig ergodischer Homöomorphismus aperiodisch ist, falls X unendlich ist.

4.3o Theorem. <u>Sei φ ein Homöomorphismus auf einem kompakten Raum X. Äquivalent sind:</u>

(i) <u>φ ist eindeutig ergodisch.</u>

(ii) <u>Für jeden Verbandsisomorphismus T_h gegeben durch $T_h f = h \cdot f \circ \varphi$ $(f \in C(X))$, $h \in C(X)$ strikt positiv, gilt $\sigma(T_h) \subset \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = r(T_h)\}$.</u>

Beweis. Setze $p_n(h) = (h \cdot h \circ \varphi \cdot \ldots \cdot h \circ \varphi^{n-1})^{1/n}$ $(h\in C(X)_+,\ n\in\mathbb{N})$.

Es gilt $\exp(M_n f) = p_n(\exp f)$ für alle reellwertigen $f \in C(X)$ $(n \in \mathbb{N})$. Aus der Vorbemerkung folgt somit für $f \in C(X)$, f reell, und $c \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n\to\infty} M_n f = c1_X \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} p_n(\exp f) = (\exp(c))1_X$$

$$\Leftrightarrow \sigma(T_{\exp f}) \cap \mathbb{R}_+ = \{\exp(c)\}.$$

Daraus folgt die Behauptung.

Eine weitere Anwendung bieten Verbandsisomorphismen auf $L^p(X,\Sigma,\mu)$ von folgender Art:

Sei (X,Σ,μ) ein endlicher Maßraum, $\varphi: X \to X$ eine bijektive Abbildung, so daß φ und φ^{-1} meßbar sind und φ maßtreu ist. Ferner sei $h \in L^\infty(X,\Sigma,\mu)$ strikt positiv (d.h. es existiert ein $\delta > 0$, so daß $h(s) \geq \delta$ für fast alle $s \in X$). Durch

$$Tf = h \cdot f \circ \varphi \qquad (f \in L^p(X,\Sigma,\mu))$$

wird ein Verbandsisomorphismus auf $L^p(X,\Sigma,\mu)$ $(1 \leq p \leq \infty)$ definiert.

Wir wollen voraussetzen, daß die zum Maßraum (X,Σ,μ) gehörende Maßalgebra nicht endlich ist (d.h. gerade, daß die Räume $L^p(X,\Sigma,\mu)$ unendlich-dimensional sind).

4.31 Satz. <u>Sind die Mengen</u> $\{s \in X \mid \varphi^n(s) = s\}$ $(n \in \mathbb{N})$ <u>Nullmengen, so ist</u> $\sigma(T)$ <u>rotationssymmetrisch der Ordnung</u> ∞. <u>Insbesondere ist</u> $\sigma(T) = \sigma_o(T)$.

Beweis. Angenommen, es gibt $r \in \sigma(T) \cap \mathbb{R}_+$, so daß $\Gamma_r \not\subset \sigma(T)$ $(\Gamma_r = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = r\})$. Dann existiert $\lambda \in \partial\sigma(T) \subset A\sigma(T)$ mit $|\lambda| = r$.

Wir zeigen, daß $\alpha\lambda \in \sigma(T)$ ist für jede Einheitswurzel α. Das ist ein Widerspruch zur Annahme.

Sei also $n \in \mathbb{N}$, α eine n-te Einheitswurzel.

Sei $\varepsilon > o$. Dann gibt es $f \in L^p(X,\Sigma,\mu)$ mit $||f||_p = 1$, so daß $||\lambda f - Tf||_p < \varepsilon/2$. Es existiert ein $\delta > o$, so daß daß $||1_D Tf||_p < \varepsilon/8$ für alle meßbaren Teilmengen D von X mit $\mu(D) < \delta$ (das folgt aus dem Satz von Lebesgue).

Nach Halmos S.71 existiert eine meßbare Teilmenge A von X, so daß $A, \varphi(A), \ldots, \varphi^{n-1}(A)$ paarweise disjunkt sind und $\mu(C) < \varepsilon$ gilt für $C = X \setminus \bigcup_{m=o}^{n-1} \varphi^m(A)$.

Setze $g = \sum_{m=o}^{n-1} \alpha^m 1_{\varphi^m(A)} + 1_C$.

Dann ist $g \in L^\infty(X,\Sigma,\mu)$ mit $|g| = 1_X$. Es ist

$$\begin{aligned} g \circ \varphi &= \sum_{m=o}^{n-1} \alpha^m 1_{\varphi^{m-1}(A)} + 1_{\varphi^{-1}(C)} \\ &= \sum_{m=o}^{n-2} \alpha^{m+1} 1_{\varphi^m(A)} + 1_{\varphi^{-1}(A)} + 1_{\varphi^{-1}(C)} \\ &= \alpha g - \alpha\alpha^{n-1} 1_{\varphi^{n-1}(A)} - \alpha 1_C + 1_{\varphi^{-1}(A)} + 1_{\varphi^{-1}(C)} \\ &= \alpha g + 1_{\varphi^{-1}(A)\setminus\varphi^{n-1}(A)} - 1_{\varphi^{n-1}(A)\setminus\varphi^{-1}(A)} + 1_{\varphi^{-1}(C)} \\ &\quad - \alpha 1_C . \end{aligned}$$

Setze $k = g\cdot f$. Dann ist $k \in L^p(X,\Sigma,\mu)$ mit $||k||_p = 1$.

Es gilt:

$$\begin{aligned}||\alpha\lambda k - Tk||_p &\leq ||\alpha\lambda g\cdot f - g\alpha Tf||_p + ||\alpha ghf\circ\varphi - hg\circ\varphi f\circ\varphi||_p \\ &= ||\lambda f - Tf||_p + ||(\alpha g - g\circ\varphi)Tf||_p \\ &\leq \quad \varepsilon/2 \quad + ||(Tf)1_{\varphi^{-1}(A)\smallsetminus\varphi^{n-1}(A)}||_p \\ &\quad + ||(Tf)1_{\varphi^{n-1}(A)\smallsetminus\varphi^{-1}(A)}||_p + \\ &\quad + ||Tf\cdot 1_{\varphi^{-1}(C)}||_p + ||Tf\cdot 1_C||_p \\ &\leq \varepsilon.\end{aligned}$$

Es ist nämlich

$\mu(C) < \delta$, $\mu(\varphi^{-1}(C)) = \mu(C) < \delta$ und

$\mu(\varphi^{n-1}(A) \smallsetminus \varphi^{-1}(A)) = \mu(\varphi^n(A) \smallsetminus A) < \delta$, da $\varphi^n(A) \smallsetminus A \subset C$.

und schließlich $\mu(\varphi^{-1}(A) \smallsetminus \varphi^{n-1}(A)) = \mu(A \smallsetminus \varphi^n(A))$

$= \mu(A) - \mu(A \cap \varphi^n(A)) = \mu(\varphi^n(A)) - \mu(A \cap \varphi^n(A))$

$= \mu(\varphi^n(A) \smallsetminus A) < \delta$.

Damit ist bewiesen, daß $\sigma(T)$ rotationsinvariant der Ordnung ∞ ist. Aus 4.4 folgt dann $\sigma(T) = \sigma_o(T)$.

4.32 Theorem. Sei (X,Σ,μ) ein endlicher Maßraum, $\psi : X \to X$ eine bijektive Abbildung, ψ und ψ^{-1} seien meßbar und ψ sei maßtreu. Ferner sei $h \in L^\infty(X,\Sigma,\mu)$ strikt positiv. Für $1 \leq p \leq \infty$ sei T_p der Verbandsisomorphismus auf $L^p(X,\Sigma,\mu)$, der durch $T_pf = h\cdot f\circ\psi$ $(f \in L^p(X,\Sigma,\mu))$ definiert ist. Dann ist $\sigma(T_1) = \sigma(T_p) = \sigma_o(T_p) = \sigma(T_\infty)$

$(1 \leq p \leq \infty)$.

Beweis. Sei Y der Stoneraum der zu (X,Σ,μ) assoziierten Maßalgebra. Dann gibt es einen Verbandsisomorphismus
$j: L^{\infty}(X,\Sigma,\mu) \to C(Y)$ mit $j(1_X) = 1_Y$.
Durch $\nu(g) = \int j^{-1}(g)\, d\mu \quad (g \in C(Y))$ wird ein Maß auf Y definiert, so daß j eine eindeutige Fortsetzung zu einem Verbandsisomorphismus j_p von $L^p(X,\Sigma,\mu)$ auf $L^p(Y,\nu)$ besitzt. Nach Konstruktion ist $L^{\infty}(Y,\nu) \doteq C(Y)$.
Sei $S_p = j_p T_p j_p^{-1} \quad (1 \leq p \leq \infty)$. Da S_p $C(Y)$ invariant läßt, und die Einschränkung von S_p auf $C(Y)$ unabhängig von p ist, gibt es einen Homöomorphismus φ auf Y und ein strikt positives $k \in C(Y)$, so daß
$S_p g = k \cdot g \circ \varphi \quad (g \in L^p(Y,\nu))$ für alle p, $1 \leq p \leq \infty$.
Dabei ist φ maßtreu bzgl. ν.
Da $\sigma(S_p) = \sigma(T_p)$ und $\sigma_o(S_p) = \sigma_o(T_p)$ ist, können wir den Beweis für S_p führen.
Man kann $Z(L^p(Y,\nu))$ mit $C(Y)$ identifizieren, indem jedem $f \in C(Y)$ der Operator $(g \to f \cdot g) \quad (g \in L^p(Y,\nu))$ auf $L^p(Y,\nu)$ zugeordnet wird. Der zu S_p assoziierte Operator $\tilde{S}_p$ ist dann durch $\tilde{S}_p f = f \circ \varphi$ für alle p gegeben. Also ist $\varphi_{S_p} = \varphi$ unabhängig von p.
Jede offen-abgeschlossene Teilmenge Z von Y definiert ein Projektionsband $J_Z^p = \{f \in L^p(Y,\nu) \mid f(t) = o \text{ für } t \notin Z\}$ und alle Projektionsbänder sind so definiert (wir identifizieren $f \in L^p(Y,\nu)$ mit einer $\overline{\mathbb{R}}$-wertigen stetigen Funktion auf Y (siehe Schaefer (1974) III 9.4)).
J_Z^p ist genau dann unter S_p und S_p^{-1} invariant, wenn

$\varphi(Z) = Z$ ist. Somit ist J_Z^p genau dann unter S_p und S_p^{-1} invariant, wenn J_Z^q invariant unter S_q und S_q^{-1} ist $(1 \leq p,q \leq \infty)$.

1. Es gilt: $r(S_p) = \lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{t\in Y} k_n(t)$

$$r(S_p^{-1})^{-1} = \lim_{n\to\infty} \inf_{t\in Y} k_n(t)$$

wobei $k_n = (k\cdot k\circ\varphi\cdot\ldots\cdot k\circ\varphi^{n-1})^{1/n}$ $(n \in \mathbb{N})$.

Der Spektralradius von S_p ist also unabhängig von p.

(1. folgt aus der Formel für den Spektralradius.)

2. Sei $o \leq p,q \leq \infty$. Für $\lambda > o$ gilt:

$\lambda \in \sigma(S_p) \Rightarrow \lambda \in \sigma(S_q)$.

Sei nämlich $\lambda > o$ und $\lambda \notin \sigma(S_q)$. Dann gibt es nach 4.1 eine offen-abgeschlossene Teilmenge Z von Y, derart daß das Projektionsband J_Z^q invariant unter S_q und S_q^{-1} ist und für die Einschränkungen U_q und V_q auf J_Z^q bzw. $(J_Z^q)^\perp$ gilt $r(U_q) < \lambda < r(V_q^{-1})^{-1}$.

Sei $U_p = S_{p|J_Z^p}$ und $V_p = S_{p|(J_Z^p)^\perp}$

Aus 1. folgt, daß $r(U_p) = r(U_q)$ und $r(V_p^{-1})^{-1} = r(V_q^{-1})^{-1}$.

Somit ist $r(U_p) < \lambda < r(V_p^{-1})^{-1}$.

Da $\sigma(S_p) = \sigma(U_p) \cup \sigma(V_p)$ ist, ist also $\lambda \notin \sigma(S_p)$.

3. Sei $Y_1 = \{t \in Y \mid \varphi(t) = t\}$

$$Y_{n+1} = \{t \in Y \mid \varphi^{n+1}(t) = t\} \setminus (Y_1 \cup \ldots \cup Y_n)$$

$(n \in \mathbb{N},\ n \geq 1)$ und

$$Y_\infty = Y \setminus \overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} Y_n}$$

Wir wollen annehmen, daß $M = \{n \in \mathbb{N} \mid Y_n \neq \emptyset\}$ unendlich ist (sonst vereinfacht sich der Beweis allenfalls).

Sei $S_{p,n} = S_p|J^p_{Y_n}$ $(n \in M,\ 1 \leq p \leq \infty)$.

Dann ist $\{(S_{p,n}, J^p_{Y_n}) \mid n \in M\}$ die kanonische Zerlegung von S_p. Nach 4.18 ist

$$\sigma(S_p) = \dot{\bigcup_{n\in M}} \sigma(S_{p,n}) \cup \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \sigma(S^{\perp}_{p,n}) \cup \sigma(S_{p,\infty})$$

$(1 \leq p \leq \infty)$, wobei $S^{\perp}_{p,n}$ wie in 4.18 definiert ist.

Ist $Y_\infty \neq \emptyset$, so erfüllt $S_{p,\infty}$ die Voraussetzung von 4.31, daher ist $\sigma(S_{p,\infty}) = \sigma_o(S_{p,\infty})$. Aus 4.19 folgt daher $\sigma(S_p) = \sigma_o(S_p)$ $(1 \leq p \leq \infty)$.

Angenommen, es gibt p,q und $\lambda \in \sigma(S_p)$, so daß $\lambda \notin \sigma(S_q)$.

Wäre $\lambda \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \sigma(S^{\perp}_{p,n})$, so wäre $|\lambda| \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \sigma(S^{\perp}_{p,n})$, also auch $|\lambda| \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \sigma(S^{\perp}_{q,n})$ nach 2. Dann aber wäre $\lambda \in \sigma(S_q)$ nach 4.18. Genauso kann $\lambda \in \sigma(S_{p,\infty})$ nicht sein, da nach 4.31 $\sigma(S_{q,\infty})$ rotationssymmetrisch der Ordnung ∞ ist.

Also gibt es ein $n \in M$, so daß $\lambda \in \sigma(S_{p,n})$.

Dann ist $\lambda = \alpha|\lambda|$ für eine n-te Einheitswurzel α.

Es ist $|\lambda| \in \sigma(S_{p,n})$, also $|\lambda| \in \sigma(S_{q,n})$ nach 2. und damit $\lambda = \alpha|\lambda| \in \sigma(S_{q,n}) \subset \sigma(S_q)$, da $\sigma(S_{q,n})$ nach 4.17 rotationssymmetrisch der Ordnung n ist. Das ist ein Widerspruch!

4.33 Korollar. <u>Sei zusätzlich zu den Voraussetzungen in</u> 4.32 φ <u>ergodisch (d.h. für jede meßbare Teilmenge</u> A <u>von</u> X <u>mit</u> $\varphi(A) = A$ <u>gilt</u> $\mu(A) = o$ <u>oder</u> $\mu(X \setminus A) = o$). <u>Dann ist</u>

$$\sigma(T_p) = \{z \in \mathbb{C} \mid r_1 \leq |z| \leq r_2\},$$

<u>wobei</u> $r_1 = r(T_p^{-1})^{-1}$ <u>und</u> $r_2 = r(T_p)$ <u>unabhängig von</u> p $(1 \leq p \leq \infty)$ <u>sind</u>.

Beweis. Da φ ergodisch ist, ist T_p bandirreduzibel. Somit ist $\sigma_o(T_p) = \{z \in \mathbb{C} \mid r(T_p^{-1}) \leq |z| \leq r(T_p)\}$ nach 4.27. Die Behauptung folgt daraus mit 4.32.

Literatur

T. Ando
(1977) Distance from the identity. Unveröffentlichte Note.

C.A. Akemann
(1967) Some mapping properties of the group algebras of a compact group. Pac. J. Math. 22, 1-8.

F.F. Bonsall
(1967) Compact Linear Operators. Lecture Notes.

F.F. Bonsall, J. Duncan
(1973) Complete Normed Algebras. Springer Verlag.

B. Brainerd, R.E. Edwards
(1966) Linear operators which commute with translations.

M.M. Day
(1973) Normed Linear Spaces. Springer Verlag.

J. Dieudonné
(196o) a) Sur le produit de composition II, J. Math. Pures et Appl. 39, 275-292.
(196o) b) Sur une propriété des groupes libres, J. Reine Angew. Math. 2o4, 3o-34.

C.F. Dunkl, D.E. Ramirez
(1971) Topics in Harmonic Analysis, New York.

O. Flösser
(1977) Das Zentrum archimedischer Vektorverbände, Preprint, Technische Hochschule Darmstadt.

J.E. Gilbert
(1968) Convolution operators on $L^p(G)$ and properties of locally compact groups. Pac. J. Math. 24, Nr. 2, 257-268.

F.P. Greenleaf
(1969) Invariant means on topological groups and their applications. Van Nostrand. New York.

P.R. Halmos
(1956) Lectures on Ergodic Theory. Chelsea Publ. Comp. New York.

E. Hewitt, K.A. Ross
(1963) Abstract Harmonic Analysis. Springer Verlag.

E. Hewitt, H.S. Zuckerman
(1966) Singular measures with absolutely continuous convolution squares. Proc. Camb. Phil. Soc. 62, 399-42o.

A. Ionescu-Tulcea, C. Ionescu-Tulcea
(1969) Topics in the theory of liftings. Springer Verlag.

H. Leptin
(1966) Faltungen von Borelschen Maßen mit L^P-Funktionen auf lokalkompakten Gruppen. Math. Ann. 163, 111-117.

H.P. Lotz
(1973) Minimal and reflexive Banach lattices. Math. Ann. 2o9, 117-126.
(1974) Extensions and liftings of positive linear mappings on Banach lattices. Trans. Amer. Math. Soc. 211, 85-1oo.

W.A.J. Luxemburg, A.C. Zaanen
(1971) Riesz Spaces I. Amsterdam: North Holland.

L. Martignon

(1978) Banachverbandsalgebren. Dissertation, Universität Tübingen.

H. Reiter

(1968) Classical Harmonic Analysis on Locally Compact Groups. At the Clarendon Press. Oxford.

W. Rudin

(1967) Fourier Analysis on Groups. Interscience Publishers. New York.

(196o) Fourier-Stieltjes transforms of measures on independent sets. Bull. Am. Math. Soc. 66, 199-2o2.

A.R. Schep

(1978) Order continuous components of operators and measures. Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A 81, 11o-117 (1978).

H.H. Schaefer

(1974) Banach Lattices and Positive Operators. Springer Verlag.

(1977) On the o - spectrum of order bounded operators. Math. Z. 154, 79-84.

H.H. Schaefer, M. Wolff, W. Arendt

(1978) On Lattice Isomorphisms with Positive Real Spectrum and Groups of Positive Operators. Math. Z. 164, 115-123.

E. Scheffold

(1971) Das Spektrum von Verbandsoperatoren in Banachverbänden. Math. Z, 123, 177-19o.

U. Schlotterbeck

(1974) Tensorprodukte von Banachverbänden und positive Operatoren. Habilitationsschrift, Tübingen.

N.Th. Varopoulos

(1966) Sets of multiplicity in locally compact abelian groups. Ann. Inst. Fourier 16, 2, 123-158.

P. Walters

(1975) Ergodic Theory. Springer Lecture Notes 488.

J. Wendel

(1952) Left centralizers and isomorphisms of group algebras. Pac. J. Math. 2, 251-261.

M. Wolff

(1969) a) Über das Spektrum von Verbandshomomorphismen in C(X). Math. Ann. 182, 161-169

b) Über das Spektrum von Verbandshomomorphismen in Banachverbänden. Math. Ann. 184, 49-55.

Lebenslauf

Am 4. März 195o wurde ich als Sohn des Betriebschefs Werner Arendt und seiner Frau Margarete, geb. Geyer, in Herzberg an der Elster geboren.
Ich besuchte von 1956 bis 196o die Volksschule und anschließend das Max-Planck-Gymnasium in Duisburg-Meiderich, an dem ich 1968 das Abitur bestand.
Vom Wintersemester 1968 bis Sommersemester 1971 studierte ich an der Freien Universität Berlin Mathematik und Physik. Die folgenden zwei Jahre verbrachte ich im Rahmen des DAAD-Austauschprogramms an der Universität Nizza (Frankreich) und erlangte dort im Juni 1973 die "Maîtrise de Mathématiques". Ich setzte mein Studium im Wintersemester 1973 an der Universität Tübingen fort, wo ich im Dezember 1975 die Diplomprüfung in Mathematik ablegte. Seit Oktober 1976 bin ich wissenschaftlicher Angestellter am Mathematischen Institut der Universität Tübingen.

Meine akademischen Lehrer in Berlin waren die Herren Gottschling, Grotemeyer, Herrlich, Preuß, Schäfke, Tippe, Wilking,
in Nizza die Herren Céa, Chazarin, Da Prato, Grisvard, Houzel, Pham, Zerner

und in Tübingen die Herren Elwert, Nagel, Schaefer, Siebert, Schlotterbeck, Schmid, Staudt, Wolff und Zeller.

Veröffentlichung (zusammen mit H.H. Schaefer und M. Wolff): On Lattice Isomorphisms with Positive Real Spectrum and Groups of Positive Operators. Math. Z. 164, 115-123 (1978).