Lösung der Aufgabe 5.2.3

Überarbeitet: MaKi

Aufgabe

Im freien Raum ist eine ideal leitfähige ungeladene metallische Hohlkugel angebracht. Ihr Außenradius sei b, der Innenradius a.

Die Hohlkugel sei zunächst geerdet. Eine Punktladung Q wird in den Abstand $c > b$ zum Kugelmittelpunkt gebracht.

a) Skizzieren Sie die Anordnung. Welche Ladungsmenge fließt auf die Hohlkugel? Welche Ersatzladungsverteilung erzeugt das gleiche Potenzial im Raum außerhalb der Kugel? Wie groß ist die Kraft, die auf die Punktladung wirkt?

Die Kugel sei nun isoliert aufgehängt.

b) Wie groß ist nun die Ladung der Kugel, wenn wieder die Punktladung Q nach c gebracht wird? Erweitern Sie die Ersatzladungsverteilung aus a), so dass die Randbedingungen erfüllt werden. Wie groß ist die Kraft auf Q jetzt?

Lösung

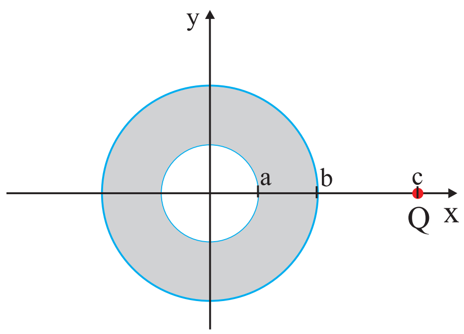

Abbildung 1: Anordnung

a) Lt. Skript ist die gesamte influenzierte Ladung genau $-Q\frac{b}{c}$.

Mit:

$$Q' = -\frac{Q \cdot b}{c}$$
$$c' \cdot c = b^2$$

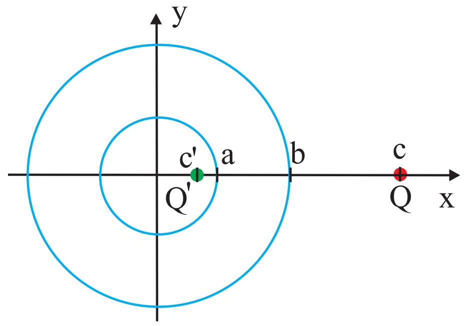

Abbildung 2: Ersatzladungsverteilung

Die Kraft auf Q beträgt in dieser Anordnung:

$$
\begin{aligned}
\vec{F} &= F \cdot \vec{e}_{\mathrm{x}} \\
F &= \frac{1}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \frac{Q \cdot Q'}{(c - c')^2} \\
&= -\frac{Q^2}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \frac{b \cdot c}{(c^2 - b^2)^2}
\end{aligned}
$$

b) Wenn die Kugel **nicht** geerdet ist, kann keine Ladung davon abfließen oder darauf fließen, die Ladung der Kugel ist also Null. Deshalb liegt ihre Oberfläche jetzt auf dem konstanten Potential $V_{\mathrm{K}} \neq 0$.

Das Gesamtpotenzial kann man sich als Superposition aus dem vorherigen Fall einer geerdeten Kugel ($V_{\mathrm{K}} = 0$) und einer Kugel mit Oberflächenpotenzial $V_{\mathrm{K}} \neq 0$ vorstellen. Die potenzialbehaftete Kugel kann auf Grund ihrer Symmetrie durch eine Ersatzladung

$$
Q_{\mathrm{K}} = 4\pi\epsilon\epsilon_0 \cdot b \cdot V_{\mathrm{K}}
$$

in ihrem Zentrum substituiert werden. Es resultiert also eine erweiterte Ersatzladungsverteilung mit insgesamt drei Ladungen Q, Q' und Q_{K}.

Da die isolierte Kugel insgesamt noch die Ladung Null tragen muss, gilt:

$$
\begin{aligned}
Q_{\mathrm{K}} &= -Q' = \frac{Q \cdot b}{c} \\
\Rightarrow \quad V_{\mathrm{K}} &= \frac{1}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \frac{Q}{c}
\end{aligned}
$$

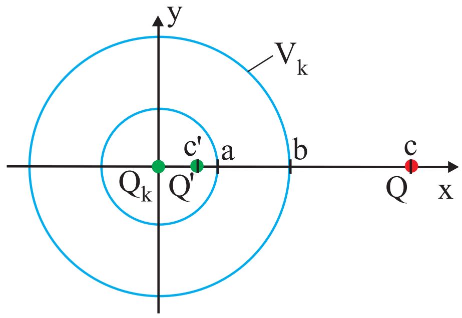

Abbildung 3: Erweiterte Ersatzladungsverteilung

Auf der Kugeloberfläche (z.B. bei $x = b$) herrscht also genau das Potential, welches die Ladung Q alleine im freien Raum (ohne die Kugel) im Ursprung erzeugt hätte.

Die Kraft auf die Ladung Q berechnet sich aus:

$$
\begin{aligned}
F &= \frac{1}{4\pi\epsilon\epsilon_0}\left(\frac{Q\cdot Q'}{(c-c')^2}+\frac{Q\cdot Q_{\mathrm{K}}}{c^2}\right)\\
&= \frac{Q}{4\pi\epsilon\epsilon_0}\left(\frac{1}{(c-c')^2}\frac{-Q\cdot b}{c}+\frac{1}{c^2}\frac{Q\cdot b}{c}\right)\\
&= \frac{Q^2}{4\pi\epsilon\epsilon_0}b\left(\frac{1}{c^3}-\frac{c}{(c^2-b^2)^2}\right)\\
&= \frac{Q^2}{4\pi\epsilon\epsilon_0}\frac{b}{c^3}\left(1-\frac{c^4}{(c^2-b^2)^2}\right)\\
&= \frac{Q^2}{4\pi\epsilon\epsilon_0}\left(\frac{b}{c}\right)^3\frac{b^2-2c^2}{(c^2-b^2)^2}
\end{aligned}
$$