Lösung der Aufgabe 2.4.1

Überarbeitet: JüM 30.4.2008

Aufgabe

Bestimmen Sie ein Skalarfeld V, das die Potenzialgleichung $\Delta V = 0$ erfüllt und

a) nur von der kartesischen Koordinate x abhängt. Der Laplaceoperator soll hier in kartesischen Koordinaten notiert sein.

b) nur von der Zylinderkoordinate ρ abhängt. Der Laplaceoperator soll hier in Zylinderkoordinaten notiert sein.

c) nur von der Kugelkoordinate r abhängt. Der Laplaceoperator soll hier in Kugelkoordinaten notiert sein.

Lösung

a) Kartesische Koordinaten:

$$\triangle V = \frac{\partial^2}{\partial x^2}V + \underbrace{\frac{\partial^2}{\partial y^2}V + \frac{\partial^2}{\partial z^2}V}_{=0} = 0$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \ V &= \iint \mathrm{d}x \ \mathrm{d}x \\ &= C_1 x + C_2 = C_1(x - x_0) \end{aligned}$$

Dies ist das Potenzial einer Flächenladung. Der Potenzial-Nullpunkt wurde bei $x = x_0$ gewählt.

b) Zylinderkoordinaten:

$$\triangle V = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} V\right) + \underbrace{\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial \phi^2}V + \frac{\partial^2}{\partial z^2}V}_{=0} = 0$$

$$0 = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}V\right)$$
$$\rho\frac{\partial}{\partial\rho}V = C_3$$
$$\partial V = \frac{C_3}{\rho}\partial\rho$$

$$V = C_3\ln\{\rho\} + C_4 = C_3\ln\{\frac{\rho}{\rho_0}\}$$

Dies ist das Potenzial einer Linienladung auf der z-Achse. Der Potenzial-Nullpunkt wurde im Abstand ρ_0 von der Linienladung gewählt.

c) Kugelkoordinaten:

$$\begin{aligned}\triangle V \quad = \quad & \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}V\right) \\ & + \underbrace{\frac{1}{r^2\sin\{\theta\}}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\{\theta\}\frac{\partial}{\partial\theta}V\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\{\theta\}}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}V}_{=0} = 0\end{aligned}$$

$$0 = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}V\right)$$
$$r^2\frac{\partial}{\partial r}V = C_5$$

$$V = -C_5\frac{1}{r} + C_6 = C_5\left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r}\right)$$

Dies ist das Potenzial einer Punktladung im Ursprung. Der Potenzial-Nullpunkt wurde im Abstand r_0 von der Punktladung gewählt.