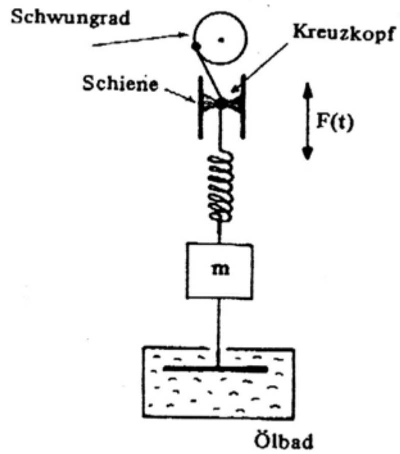
Gedämpfte Schwingung mit periodischer äußerer Kraft: Eine Masse m sei an einer elastischen Feder mit der Federkonstanten k aufgehängt und starr mit einem in einer Flüssigkeit eingetauchten Dämpfungskolben verbunden.

Wird die Feder durch eine von außen angreifende periodische Kraft $F = F_0 \cdot \cos \alpha t$ ausgelenkt, so beschreibt das System eine Wegänderung in Abhängigkeit von der Zeit, die dem Kurvenbild einer gedämpften Schwingung entspricht. Bei einer Abwärtsbewegung der Masse tritt eine nach oben gerichtete Federkraft auf, die proportional der Auslenkung ist

$$F_f = -kx,$$



Veranschaulichung eines gedämpften Systems mit periodischer äußerer Kraft.

und außerdem eine geschwindigkeitsproportionale Reibungs– bzw. Dämpfungskraft, die proportional zu $\vec{v}$ ist:

$$F_r = -\beta \dot{x}.$$

Zusammen mit der periodischen äußeren Kraft $F(t) = F_0 \cos \alpha t$ ergibt sich damit folgende Differentialgleichung für dieses System:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - \beta \dot{x} + F_0 \cos \alpha t, \tag{23.17}$$

oder etwas umgeschrieben

$$\ddot{x} + 2\gamma \dot{x} + \omega^2 x = f_0 \cos \alpha t \tag{23.18}$$

mit den Abkürzungen:

$$2\gamma = \frac{\beta}{m}; \quad \omega^2 = \frac{k}{m}; \quad f_0 = \frac{F_0}{m}.$$

Diese Differentialgleichung ist inhomogen (es taucht ein von x unabhängiger Term, nämlich $f_0 \cos \alpha t$, in der Differentialgleichung auf) und beschreibt eine gedämpfte, *erzwungene Schwingung.* Die allgemeine Lösung einer inhomogenen Differentialgleichung setzt sich aus der allgemeinen Lösung der homogenen Differentialgleichung und der speziellen Lösung der inhomogenen Differentialgleichung zusammen, so daß die allgemeine Lösung die Form

$$x(t) = x_0(t) + Ax_1(t) + Bx_2(t) \tag{23.19}$$

hat. Damit enthält die allgemeine Lösung wieder zwei freie Konstanten A und B, die zur Erfüllung der Anfangsbedingungen (Anfangslage und Anfangsgeschwindigkeit) notwendig sind.

Für diese drei Lösungsansätze gelten die Differentialgleichungen

$$\ddot{x}_0 + 2\gamma\dot{x}_0 + \omega^2 x_0 = f_0 \cos\alpha t, \tag{23.20}$$
$$\ddot{x}_{1,2} + 2\gamma\dot{x}_{1,2} + \omega^2 x_{1,2} = 0. \tag{23.21}$$

Diese Gleichungen folgen direkt aus der Bedeutung (Definition) der verschiedenen Lösungen: $x_0(t)$ soll die spezielle Lösung der inhomogenen Differentialgleichung sein, was durch (23.20) ausgedrückt wird, während $x_{1,2}(t)$ Lösung der homogenen Differentialgleichung (23.21) sein sollen.

Um die spezielle Lösung $x_0(t)$ zu finden, überlegen wir folgendes:

Nach Beendigung des Einschwingungsvorganges wird die Masse m mit der Frequenz α der einwirkenden Kraft schwingen. Als Lösungsansatz für die spezielle Lösung versuchen wir deshalb

$$x_0(t) = C_1 \cos\alpha t + C_2 \sin\alpha t.$$

Setzen wir diesen Ansatz in Gleichung (23.20) ein, so folgt

$$\begin{aligned} f_0 \cos\alpha t =\ & \\ & -\alpha^2(C_2 \sin\alpha t + C_1 \cos\alpha t) + 2\gamma(C_2\alpha\cos\alpha t - C_1\alpha\sin\alpha t) \\ & +\omega^2(C_2\sin\alpha t + C_1\cos\alpha t) \end{aligned}$$

Durch Zusammenfassen und Umordnen ergibt sich:

$$\sin\alpha t\,(-\alpha^2 C_2 - 2\gamma\alpha C_1 + \omega^2 C_2) + \cos\alpha t\,(-C_1\alpha^2 + 2\gamma\alpha C_2 + C_1\omega^2) = f_0\cos\alpha t.$$

Ein Koeffizientenvergleich ergibt, da sin und cos linear unabhängig sind:

$$\begin{aligned} C_1(2\gamma\alpha) + C_2(\alpha^2 - \omega^2) &= 0, \\ C_1(-1)(\alpha^2-\omega^2) + C_2(2\gamma\alpha) &= f_0. \end{aligned}$$

Daraus folgt für C_1 und C_2

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{-(\alpha^2-\omega^2)f_0}{4\gamma^2\alpha^2 + (\alpha^2-\omega^2)^2}, \\ C_2 &= \frac{f_0 2\gamma\alpha}{4\gamma^2\alpha^2 + (\alpha^2-\omega^2)^2}. \end{aligned}$$

Setzen wir die gefundenen Werte für C_1 und C_2 in den Lösungsansatz ein, so ergibt sich als spezielle Lösung:

$$x_0(t) = f_0\left[\underbrace{-\frac{\alpha^2-\omega^2}{(\alpha^2-\omega^2)^2+4\gamma^2\alpha^2}}_{\overline{A}}\cos\alpha t + \underbrace{\frac{2\gamma\alpha}{(\alpha^2-\omega^2)^2+4\gamma^2\alpha^2}}_{\overline{B}}\sin\alpha t\right],$$

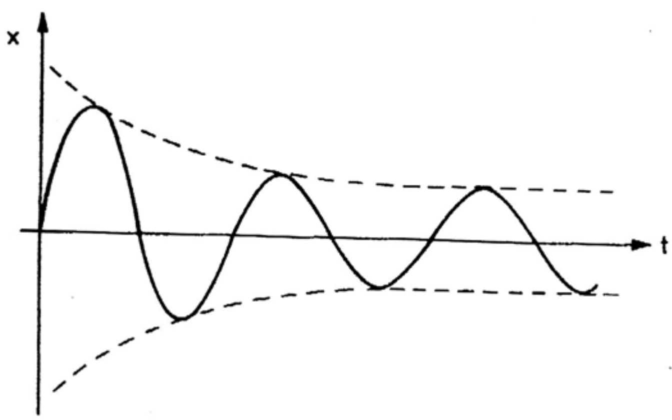
oder, umgeschrieben, erhält man mit

$$\begin{aligned}
\overline{A}\cos\alpha t + \overline{B}\sin\alpha t &= \sqrt{\overline{A}^2 + \overline{B}^2}\cos(\alpha t - \varphi),\\
\tan\varphi &= \frac{\overline{B}}{\overline{A}}.\\
x_0(t) &= f_0\sqrt{\frac{4\gamma^2\alpha^2 + (\alpha^2-\omega^2)^2}{((\alpha^2-\omega^2)^2 + 4\gamma^2\alpha^2)^2}}\cos(\alpha t - \varphi),\\
x_0(t) &= \frac{f_0}{\sqrt{(\alpha^2-\omega^2)^2 + 4\gamma^2\alpha^2}}\cos(\alpha t - \varphi), \qquad \tan\varphi = \frac{-2\gamma\alpha}{\alpha^2-\omega^2}.
\end{aligned}$$

Da die Lösungen der homogenen Differentialgleichung (23.21) im Fall schwacher Dämpfung $x_1(t) = e^{-\gamma t}\sin\Omega t$ und $x_2(t) = e^{-\gamma t}\cos\Omega t$ sind, ergibt sich als vollständige Lösung der Differentialgleichung:

$$\begin{aligned}
x(t) &= \frac{f_0}{\sqrt{(\alpha^2-\omega^2)^2 + 4\gamma^2\alpha^2}}\cos(\alpha t - \varphi) + e^{-\gamma t}(A\sin\Omega t + B\cos\Omega t)\\
&= \frac{f_0}{\sqrt{(\alpha^2-\omega^2)^2 + 4\gamma^2\alpha^2}}\cos(\alpha t - \varphi) + De^{-\gamma t}\cos(\Omega t - \vartheta) \qquad (23.22)
\end{aligned}$$

mit $D^2 = A^2 + B^2$, $\Omega^2 = \omega^2 - \gamma^2$ und $\vartheta = \arctan\frac{B}{A}$.



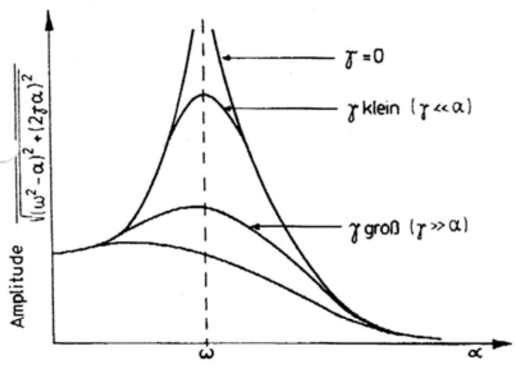
Die graphische Darstellung der Bewegung (4) des schwachgedämpften Oszillators mit periodischer äußerer Kraft.

Wie auch immer die Anfangsbedingungen lauten, bleibt bei von Null verschiedener Dämpfung ($\gamma > 0$) nach hinreichend langer Zeit nur noch der erste Term, die spezielle Lösung der Differentialgleichung $x_0(t)$ übrig. Der zweite Term in (23.22), der proportional $e^{-\gamma t}$ abklingt, hängt von den Konstanten A, B ab, die durch die Anfangsbedingungen festgelegt werden. Dieser zweite Term beschreibt daher offenbar den *Einschwingvorgang,* der nach einiger Zeit „vergessen" ist.

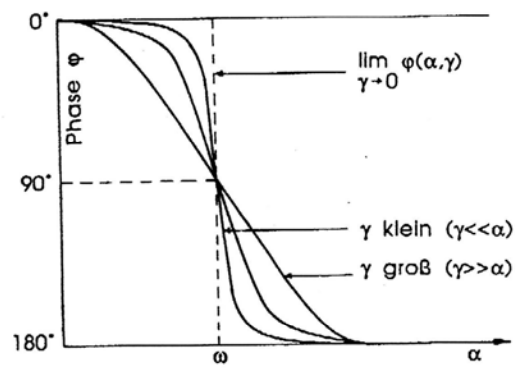
Für die spezielle Anregungsfrequenz

$$\alpha = \sqrt{\omega^2 - 2\gamma^2} \qquad (\gamma \quad \text{Halbwertsresonanzbreite})$$

wird eine maximale Auslenkung erreicht.



Die Amplitude der erzwungenen gedämpften Schwingung als Funktion der Erregerfrequenz α.



Die Phasenverschiebung des Oszillators gegenüber der erregenden Schwingung in Abhängigkeit von der Erregungsfrequenz α, also Darstellung von $\varphi = -\arctan \frac{2\gamma\alpha}{\alpha^2 - \omega^2}$.

Die Amplitude der erzwungenen gedämpften Schwingung (23.22) ist in Abhängigkeit von der erzwungenen Frequenz α bei verschiedener Dämpfung in der obigen Figur dargestellt. Bei der Eigenfrequenz ω des Oszillators resoniert das System (man sagt, es liegt eine Resonanz vor). Im Fall ohne Dämpfung ($\gamma = 0$) wird im Resonanzfall die Amplitude unendlich groß (die Feder springt auseinander *(Resonanzkatastrophe)).* Im Fall sehr starker Dämpfung ist die Resonanz kaum zu bemerken.

Die dazugehörige Phase der Schwingung ist ebenfalls für verschiedene Dämpfungen in der unteren Figur gezeigt. Bei sehr niedriger Frequenz α ($\alpha \ll \omega$) der erzwingenden Kraft ist die Phasenverschiebung φ zwischen Kraft und Massenbewegung Null. Bei sehr hoher Frequenz ($\alpha \gg \omega$) ist die entsprechende Phasenverschiebung 180°. Beides ist plausibel.