

3. Keplersches Gesetz:

Es war $\frac{dA}{dt} = \frac{L}{2m}$ oder $\frac{dA}{dt} = \frac{A}{T} = \frac{\pi ab}{T} = \frac{\pi a^2 \sqrt{1-\epsilon^2}}{T} \rightarrow \frac{4\pi^2 a^4 (1-\epsilon^2)}{T^2} = \frac{L^2}{m^2}$

Aus der Ellipsegleichung: $\varphi = \begin{cases} 0 \\ \pi \end{cases} \rightarrow \frac{1}{a \pm \epsilon} = \frac{1}{a(1 \pm \epsilon)} = \frac{1}{b^2} (1 \mp \epsilon)$ addiert $a(1-\epsilon^2) = \frac{b^2}{a}$

Eingesetzt ergibt sich mit $\frac{b^2}{a} = \frac{L^2}{Cm}$: $\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2 m}{C}$; mit $C = G m_s \cdot m$: $\boxed{\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{G m_s}}$

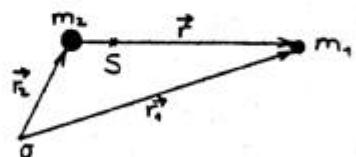
einfacher: $\frac{L}{2m} = \frac{\pi ab}{T}$ quadriert; $L^2 = \frac{b^2}{a} C m$ eingesetzt $\rightarrow$

Mithbewegung des Kraftzentrums:

Bisher wurde das Kraftzentrum als fest angenommen, d.h. bei der Planetenbewegung $m_s = \infty$.
 Strenggenommen bewegen sich aber beide Massen (Zweikörperproblem):

$$\begin{aligned} \ddot{\vec{r}}_1 &= \frac{1}{m_1} \vec{F}_{12} \\ \ddot{\vec{r}}_2 &= \frac{1}{m_2} \vec{F}_{21} = -\frac{1}{m_2} \vec{F}_{12} \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \text{subtr.} \\ \ddot{\vec{r}}_1 - \ddot{\vec{r}}_2 \end{array} \right\} = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) \vec{F}_{12}$$

$$\text{somit } \boxed{\mu \ddot{\vec{r}} = \vec{F}_{12}} \quad \text{mit } \boxed{\mu = m_1 / \left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right)} \rightarrow \frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{G(m_s + m)}$$



Damit Reduktion auf Einteilchenproblem (mit "reduzierter Masse" μ).

Erhält man für $r(\varphi)$ z.B. eine Ellipse, so beschreiben auch beide Einzelmassen Ellipsen.
 Ihr (ruhender) Schwerpunkt ist Brennpunkt.

Es gilt nämlich:

$$\begin{aligned} m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 &= (m_1 + m_2) \vec{r}_g \quad (\text{Definition des Schwerpunkts}) \quad \underbrace{(\vec{r}_1 - \vec{r}_g)}_{\vec{R}_1} m_1 + \underbrace{(\vec{r}_2 - \vec{r}_g)}_{\vec{R}_2} m_2 = 0 \\ \rightarrow \underbrace{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}_0 &= (m_1 + m_2) \ddot{\vec{r}}_g \end{aligned}$$

$$\boxed{\ddot{\vec{r}}_g = 0}$$

$$R_1 / R_2 = m_2 / m_1$$

Subtraktion von $\ddot{\vec{r}}_g$ von den Ausgangsgleichungen:

$$\underbrace{\ddot{\vec{r}}_1 - \ddot{\vec{r}}_g}_{\ddot{\vec{R}}_1} = \frac{1}{m_1} \underbrace{\vec{F}_{12}}_{\mu \ddot{\vec{r}}} \quad \text{bzw.} \quad \underbrace{\ddot{\vec{r}}_2 - \ddot{\vec{r}}_g}_{\ddot{\vec{R}}_2} = \frac{1}{m_2} \underbrace{\vec{F}_{21}}_{-\mu \ddot{\vec{r}}} (= 0!)$$

d.h. die Bahnkurven sind auch bzgl. des Schwerpunkts Kegelschnitte.

oder:

$$\left. \begin{aligned} \vec{R}_1 - \vec{R}_2 &= \vec{r} \\ m_1 \vec{R}_1 + m_2 \vec{R}_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \rightarrow \left. \begin{aligned} \vec{R}_1 &= \frac{\mu}{m_1} \vec{r} \\ \vec{R}_2 &= -\frac{\mu}{m_2} \vec{r} \end{aligned} \right\} (\vec{r} \text{ beschreibt Ellipse, s.o.})$$

