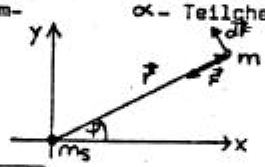
Bewegung im Zentralfeld (Kepler-Problem) (vgl. Sommerfeld, Vorl. über theor. Physik, Bd. 1)

Welche Bahnkurven beschreiben Teilchen, die folgenden Kraftgesetzen gehorchen :

$\vec{F} = -G\dfrac{m_s \cdot m}{r^2}\dfrac{\vec{r}}{r}$ — Planetenbewegung; m_s - Sonnenmasse, m - Planetenmasse

$\vec{F} = -\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Ze \cdot e}{r^2}\dfrac{\vec{r}}{r}$ — Elektron am Kern (Ladung Ze) (Bohr-Sommerfeldsches Atommodell)

$\vec{F} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Ze \cdot 2e}{r^2}\dfrac{\vec{r}}{r}$ — Rutherford - Streuung von α- Teilchen am Kern (Ladung Ze)



Gemeinsamer Typ des Kraftgesetzes: $\vec{F} = -\dfrac{C}{r^2}\dfrac{\vec{r}}{r}$

$|\vec{r}| = r$ = Abstand der Massen

Differentialgleichung für die Bahnbewegung: $\boxed{m\ddot{\vec{r}} = -\dfrac{C}{r^2}\dfrac{\vec{r}}{r}}$ + Randbedingungen (6 skalare Größen) $\rightarrow \vec{r}(t)$.

Vereinfachung des mathematischen Problems durch Information aus dem Flächensatz:

$\dfrac{dA}{dt} = \dfrac{|\vec{L}|}{2m} = \text{const.} \rightarrow$ Bahn eben; es sei $\vec{L} = (0,0,L)$ (3 Randbedingungen)

In Polarkoordinaten : $\dfrac{dA}{dt} = \dfrac{1}{2} r^2\dot{\varphi} \rightsquigarrow L = m r^2 \dot{\varphi} = \text{const.}$

Bahngleichung in der x-y-Ebene:

$$\begin{cases}\dfrac{d\dot{x}}{dt} = -\dfrac{C}{mr^2}\cos\varphi \\[2mm] \dfrac{d\dot{y}}{dt} = -\dfrac{C}{mr^2}\sin\varphi\end{cases} \xrightarrow{\cdot\frac{dt}{d\varphi}} \begin{cases}\dfrac{d\dot{x}}{d\varphi} = -\dfrac{C}{mr^2\dot{\varphi}}\cos\varphi \\[2mm] \dfrac{d\dot{y}}{d\varphi} = -\dfrac{C}{mr^2\dot{\varphi}}\sin\varphi\end{cases} \xrightarrow{\text{integriert}} \begin{cases}\dot{x} = -\dfrac{C}{L}\sin\varphi + A \\[2mm] \dot{y} = \dfrac{C}{L}\cos\varphi + B\end{cases}$$

Es sei $\dot{x} = 0$ für $\varphi = 0 \rightsquigarrow A = 0$ (4. Randbedingung)

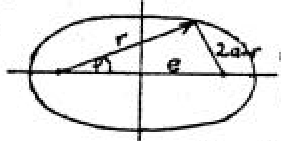
Einführung von (ebenen) Polarkoordinaten $x = r\cdot\cos\varphi$, $y = r\cdot\sin\varphi$:

$$\begin{cases}\dot{r}\cos\varphi - r\dot{\varphi}\sin\varphi = \dot{x} = -\dfrac{C}{L}\sin\varphi & \cdot(-\sin\varphi) \\[2mm] \dot{r}\sin\varphi + r\dot{\varphi}\cos\varphi = \dot{y} = \dfrac{C}{L}\cos\varphi + B & \cdot(\cos\varphi)\end{cases} \xrightarrow{\text{addiert}} r\dot{\varphi} = \frac{C}{L} + B\cos\varphi \quad \Big|\cdot mr$$

$\rightarrow \boxed{\dfrac{1}{r} = \dfrac{Cm}{L^2}\left(1 + \dfrac{BL}{C}\cos\varphi\right)}$ Bahnkurve $r = r(\varphi)$ der Bewegung.

Nachweis, daß dies Kegelschnitte sind; Fallunterscheidungen:

Ellipse



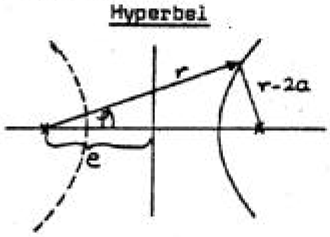
$e^2 = a^2 - b^2$

$\varepsilon = \dfrac{e}{a} < 1$

Der Kosinussatz $(2a - r)^2 = r^2 + 4e^2 - 4er\cos\varphi$

ergibt $\dfrac{1}{r} = \dfrac{a}{b^2}(1 - \varepsilon\cos\varphi)$

Hyperbel



$e^2 = a^2 + b^2$

$\varepsilon = \dfrac{e}{a} > 1$

$\dfrac{1}{r} = \dfrac{a}{b^2}(-1 + \varepsilon\cos\varphi)$

(rechter Ast)

Zusammenstellung:

	linker Brennpunkt als Zentrum	rechter Brennpunkt als Zentrum
Ellipse	$\frac{1}{r} = \frac{a}{b^2}(1 - \varepsilon\cos\varphi)$	$\frac{1}{r} = \frac{a}{b^2}(1 + \varepsilon\cos\varphi)$
Hyperbel linker Ast	$\frac{1}{r} = \frac{a}{b^2}(1 + \varepsilon\cos\varphi)$	$\frac{1}{r} = \frac{a}{b^2}(-1 - \varepsilon\cos\varphi)$
rechter Ast	$\frac{1}{r} = \frac{a}{b^2}(-1 + \varepsilon\cos\varphi)$	$\frac{1}{r} = \frac{a}{b^2}(1 - \varepsilon\cos\varphi)$

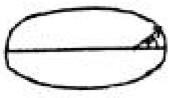
5. Randbedingung: Festlegung von B

Die 6. Randbedingung legt z.B. $r(t_0)$ oder $\varphi(t_0)$ fest.

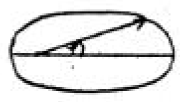
Fallunterscheidungen:

$\boxed{\begin{array}{c} C > 0 \\ \text{Anziehung}\end{array}}$

$\left|\dfrac{BL}{C}\right| < 1$: Ellipse $BL > 0$



$BL < 0$



$\left|\dfrac{BL}{C}\right| > 1$: Hyperbel $BL > 0$

$BL < 0$