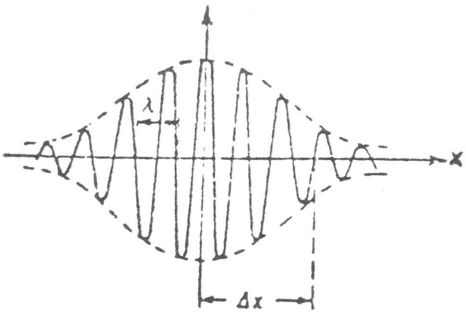
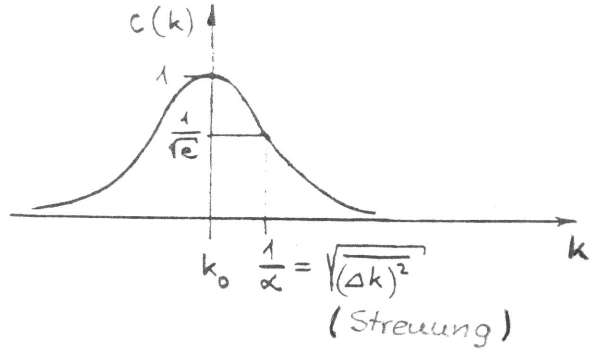
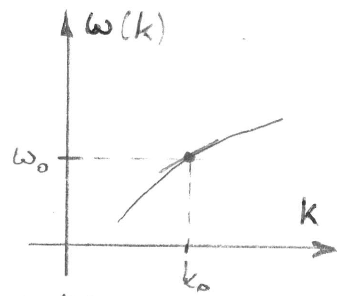
Wellenpaket; Phasen- und Gruppengeschwindigkeit

Ein Wellenpaket $\psi(x,t)$ entsteht z.B. durch Überlagerung mehrerer ebener Wellen $\exp\left\{ i \left[\omega(k)\cdot t - kx \right] \right\}$ mit verschiedenem $k = \frac{2\pi}{\lambda}$.





Amplitudenverteilung: $c(k) = \exp\left[-\frac{\alpha^2}{2} (k - k_0)^2 \right]$



$\omega(k)$ „Dispersionsrelat."

$$\psi(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} c(k) \cdot \exp\left\{ i \left[\omega(k)t - kx \right] \right\} dk$$

(vgl. Fourier-Transformation !)

Berechnung des Integrals:

$$\varkappa = k - k_0 \; ; \qquad \omega = \omega_0(k_0) + \overbrace{\left(\frac{\partial \omega}{\partial k}\right)_{k_0}}^{\omega'} \cdot \varkappa + \frac{1}{2} \overbrace{\left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial k^2}\right)_{k_0}}^{\omega''} \cdot \varkappa^2 + \ldots$$

Umformung des Exponenten:

$$-\frac{\varkappa^2 \alpha^2}{2} + i\left[\omega_0 t + \omega' t \varkappa + \frac{1}{2} \omega'' t \varkappa^2 - (k_0 + \varkappa) x \right]$$

$$= i(\omega_0 t - k_0 x) + \varkappa^2 \left(\frac{i}{2} \omega'' t - \frac{\alpha^2}{2} \right) + i(\omega' t - x)\varkappa \text{ ; quadrat. Ergänzung:}$$

$$= i(\omega_0 t - k_0 x) + \frac{1}{2}(i\omega'' t - \alpha^2)\left[\varkappa^2 + 2\frac{i(\omega' t - x)\varkappa}{i\omega'' t - \alpha^2} + \frac{-(\omega' t - x)^2}{(i\omega'' t - \alpha^2)^2} \right] + \frac{(\omega' t - x)^2}{2(i\omega'' t - \alpha^2)}$$

Damit wird

$$\psi(x,t) = \exp\left[i(\omega_0 t - k_0 x) \right] \cdot \exp\left[\frac{-(\omega' t - x)^2}{2(\alpha^2 - i\omega'' t)} \right] \int_{\varkappa=-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\frac{1}{2}(\alpha^2 - i\omega'' t) \cdot (\varkappa + \mathrm{const})^2 \right] d\varkappa$$

Mit $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^2 x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{a}$ $(a > 0)$ ergibt sich schließlich

$$\psi(x,t) = \exp\left[i(\omega_0 t - k_0 x) \right] \cdot \exp\left[\frac{-(\omega' t - x)^2}{2(\alpha^2 - i\omega'' t)} \right] \cdot \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{\alpha^2 - i\omega'' t}} \text{ ; Betragsbildg.}$$

$$|\psi(x,t)| = \exp\left[\frac{-(\omega' t - x)^2}{2\left(\alpha^2 + \frac{1}{\alpha^2}\omega''^2 t^2\right)} \right] \cdot \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt[4]{\alpha^4 + \omega''^2 t^2}}$$