3) Nichtperiodische Funktionen : Einzelner Rechteck-Impuls

vgl. Beispiel 1 ! Grenzübergang $T \to \infty$; $n \frac{2\pi}{T} = \omega$ (kontin.)

$$f(t) = \frac{\tau}{T} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \pi n \frac{\tau}{T}}{n} \cos 2\pi n \frac{t}{T} = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \omega \frac{\tau}{2}}{n} \cdot \overbrace{\Delta n}^{=1} \cdot \cos \omega t$$

$$= \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \omega \frac{\tau}{2}}{\omega} \cdot \Delta\omega \cdot \cos \omega t \to \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \underbrace{\frac{\sin \omega \frac{\tau}{2}}{\omega}}_{a(\omega)} \cos \omega t \, d\omega$$

Berechnung mit Fourier-Integral:

$$f(t) = \int_0^{\infty} a(\omega) \cos \omega t \, d\omega \; ; \qquad a(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\tau/2} \cos \omega t \, dt = \frac{2}{\pi\omega} \sin \omega \frac{\tau}{2}$$

somit $f(t) = \frac{2}{\pi} \frac{\tau}{2} \int_0^{\infty} \frac{\sin \omega \frac{\tau}{2}}{\omega \frac{\tau}{2}} \cos \omega t \, d\omega$; vgl. oben !

4) Gedämpfte Schwingung

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ e^{-\frac{\Gamma}{2} t} \cos \beta t & t > 0 \end{cases}$$; Verwendung der komplexen Darstellung

$$c(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-\frac{\Gamma}{2} t} \, e^{-i\omega t} \cdot \frac{1}{2} \left(e^{i\beta t} + e^{-i\beta t}\right) dt$$

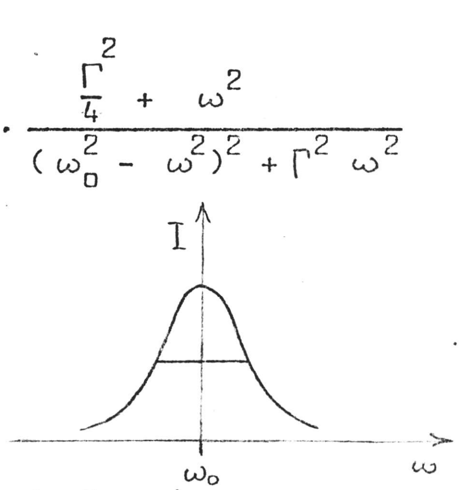
$$= \frac{1}{4\pi} \left[\frac{1}{(\frac{\Gamma}{2} + i\omega) - i\beta} + \frac{1}{(\frac{\Gamma}{2} + i\omega) + i\beta} \right] = \frac{\frac{\Gamma}{2} + i\omega}{4\pi \left[(\frac{\Gamma}{2} + i\omega)^2 + \beta^2 \right]}$$

Mit $\omega_0^2 = \beta^2 + \frac{\Gamma^2}{4}$ (ω_0 Frequenz des ungedämpften Oszillators)

ergibt sich:

$$c(\omega) = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{\frac{\Gamma}{2} + i\omega}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\Gamma\omega} \; ; \quad c \cdot c^* = \frac{1}{16\pi^2} \cdot \frac{\frac{\Gamma^2}{4} + \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \Gamma^2 \omega^2}$$

Somit $I(\omega) \sim \frac{\Gamma^2 + 4\omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \Gamma^2 \omega^2}$



(Lorentz-Kurve)

Näherung für $\Gamma^2 \ll \omega^2$ und $\omega \approx \omega_0$:

$$I(\omega) \sim \frac{1}{(\omega_0 - \omega)^2 + (\frac{\Gamma}{2})^2}$$

Linienbreite: $I_{max} = \frac{4}{\Gamma^2}$; $I_{\frac{1}{2}} = \frac{2}{\Gamma^2} \rightsquigarrow \omega_0 - \omega_{\frac{1}{2}} = \frac{\Gamma}{2}$

somit Linienbreite $\Delta\omega = \Gamma$