Fourier-Analyse
periodischer und nichtperiodischer Vorgänge (Schwingungen)

Literatur: z.B. W.I. Smirnow, Lehrgang der höheren Math., Teil II

Berkeley Physics Course - Vol. 3 (Waves)

Bronstein-Semendjajew: Taschenbuch der Mathematik

Formelzusammenstellung:

Für eine periodische Funktion $f(t) = f(t+T)$, die stückweise glatt ist (Funktion und 1. Ableitung stückweise stetig) gilt die Fourier-Reihenentwicklung:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t)$$

Periode $T = \frac{2\pi}{\omega}$ (d.h. ω fest)

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos n\omega t \, dt \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin n\omega t \, dt \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

Komplexe Schreibweise:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega t} \qquad c_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t)\, e^{-in\omega t} \, dt$$

Zusammenhang c_n, a_n, b_n:

$$c_n = \begin{cases} \frac{1}{2}(a_n - ib_n) & n > 0 \\ \frac{1}{2}(a_{-n} + ib_{-n}) & n < 0 \end{cases}$$

bzw.

$$c_n + c_{-n} = a_n \qquad c_0 = \frac{a_0}{2}$$

$$c_n - c_{-n} = -ib_n$$

Die Reihenentwicklung ist auch für eine nichtperiodische Funktion möglich, die nur in einem (endl.) Intervall definiert ist.

Für eine nichtperiodische Funktion $f(t)$ (stückweise glatt, ferner existiere $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| \, dt$) gilt die Darstellung in Form eines Fourier-Integrals:

$$f(t) = \int_0^{\infty} a(\omega) \cos\omega t \, d\omega + \int_0^{\infty} b(\omega) \sin\omega t \, d\omega$$

(ω hier kontinuierliche Variable)

$$a(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos\omega t \, dt \qquad b(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin\omega t \, dt$$

Komplexe Schreibweise:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} c(\omega)\, e^{i\omega t} \, d\omega \qquad c(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\omega t} \, dt$$

An Sprungstelle gilt $f(t) = \frac{1}{2}\left[f(t+0) + f(t-0) \right]$