Skript zur Vorlesung

Kombinatorik

Wintersemester 2009/10

Prof. Dr. Helmut Maier
Dipl.-Math. Hans- Peter Reck

Institut für Zahlentheorie und Wahrscheinlichkeitstheorie
Universität Ulm

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Anzahlprobleme

1.1 Grundprobleme der Kombinatorik

Die Kombinatorik ist die Wissenschaft der Anordnungen und Konfigurationen. In diesem Abschnitt wollen wir zwei Grundprobleme erörtern: das Existenzproblem und das Anzahlproblem.

Wir beginnen mit einem Existenzproblem, dem Eulerschen Offiziersproblem (1782), einem der ältesten und berühmtesten Probleme der Kombinatorik:
Aus jedem von sechs Regimenten kommen sechs Offiziere, so daß von jedem Regiment jeder von sechs Dienssträngen genau einmal vertreten ist. Diese 36 Offiziere sollen so in einem Quadrat antreten, daß in jeder Zeile und in jeder Spalte sowohl jedes Regiment als auch jeder Dienstrang genau einmal vertreten ist.

Zur Untersuchung dieses Problems numerieren wir sowohl die Regimente als auch die Dienstränge mit 1 bis 6. Dann betrachten wir zwei Matrizen $\mathcal{A} = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq 6}$ und $\mathcal{B} = (b_{ij})_{1\leq i,j\leq 6}$. Die i- te Zeile und j- te Spalte von $\mathcal{A}$ enthalte die Regimentsnummer, die i- te Zeile und j- te Spalte von $\mathcal{B}$ die Nummer des Dienstranges des dort stehenden Offiziers.
Hat das Eulersche Offiziersproblem eine Lösung, so sind die Matrizen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ sogenannte lateinische Quadrate. In jeder Zeile und in jeder Spalte von $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ kommt jede der Zahlen $1, \ldots, 6$ genau einmal vor. Außerdem sind $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ orthogonale lateinische Quadrate. Unter den Paaren (a_{ij}, b_{ij}) kommt jedes der Paare $(1,1), (1,2), \ldots, (6,6)$ genau einmal vor.

Wie schon Euler 1782 vermutete gibt es kein Paar von orthogonalen lateinischen Quadraten der Ordnung 6, und das Eulersche Offiziersproblem ist damit unlösbar. Dies konnte jedoch erst 1900 gezeigt werden. Im Jahre 1960 konnte schließlich gezeigt werden, daß es für jedes $m \neq 2, 6$ ein Paar orthogonaler lateinischer Quadrate der Ordnung m gibt.
Für $m = 3$ haben wir zum Beispiel

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Zum Abschluß dieser Einführung wollen wir ein typisches Beispiel eines Anzahlproblems geben:

Beispiel 1.1.1. Eine ID- Nummer (Identifikationsnummer) bestehe aus einer Folge von drei Buchstaben, die aus dem Alphabet $A, \ldots, Z$ mit 26 Buchstaben entnommen werden und einer Folge von

fünf Ziffern, die der Menge $\{1, \ldots, 9\}$ entnommen werden. Wieviele Möglichkeiten gibt es, wenn für die Buchstaben Wiederholungen zulässig sind, für die Ziffern aber nicht?

Lösung:
Wir konstruieren die ID- Nummer in einer Folge von Schritten:

1. Schritt	Wahl des 1. Buchstabens:	26 Möglichkeiten
2. Schritt	Wahl des 2. Buchstabens:	26 Möglichkeiten
3. Schritt	Wahl des 3. Buchstabens:	26 Möglichkeiten
4. Schritt	Wahl der 1. Ziffer:	9 Möglichkeiten
5. Schritt	Wahl der 2. Ziffer:	8 Möglichkeiten
6. Schritt	Wahl der 3. Ziffer:	7 Möglichkeiten
7. Schritt	Wahl der 4. Ziffer:	6 Möglichkeiten
8. Schritt	Wahl der 5. Ziffer:	5 Möglichkeiten

Gesamtzahl: $26^3 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5$ Möglichkeiten.

1.2 Grundlegende Anzahlprobleme

Definition 1.2.1. Es seien $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_r$ Mengen. Unter dem kartesischen Produkt $\mathcal{A}_1 \times \ldots \times \mathcal{A}_r$ der Mengen $\mathcal{A}_i$ versteht man die Menge aller r- tupel $(a_1, \ldots, a_r)$, bei der die „i- te Komponente“ a_i der Menge $\mathcal{A}_i$ entnommen wird:

$$\mathcal{A}_1 \times \ldots \times \mathcal{A}_r = \{(a_1, \ldots, a_r) : \ a_i \in \mathcal{A}_i, \ 1 \leq i \leq r\}.$$

Satz 1.2.2. *Es gilt:*

(i) *Es seien $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_r$ endliche Mengen mit $|\mathcal{A}_i| = n_i$.*
Dann ist $|\mathcal{A}_1 \times \ldots \times \mathcal{A}_r| = n_1 \cdot \ldots \cdot n_r$ $(= |\mathcal{A}_1| \cdot \ldots \cdot |\mathcal{A}_r|)$.

(ii) *Gilt $\mathcal{A}_i \cap \mathcal{A}_j = \emptyset$ für $i \neq j$, so ist $|\mathcal{A}_1 \cup \ldots \cup \mathcal{A}_r| = |\mathcal{A}_1| + \ldots + |\mathcal{A}_r|$.*

Beweis. (i) Wir konstruieren das r- tupel $(a_1, \ldots, a_r)$ in einer Folge von Schritten:

1. Schritt	Wahl von a_1:	n_1 Möglichkeiten
2. Schritt	Wahl von a_2:	n_2 Möglichkeiten
$\vdots$		$\vdots$
r. Schritt	Wahl von a_r:	n_r Möglichkeiten

Gesamtzahl: $n_1 \cdot \ldots \cdot n_r$ Möglichkeiten

(ii) ohne Beweis.

□

Bemerkung 1.2.3. Ein wichtiger Spezialfall von Satz 1.2.2 bildet der Fall, in dem alle Mengen $\mathcal{A}_i$ identisch sind: $\mathcal{A}_1 = \ldots = \mathcal{A}_r = \mathcal{A}$.
Die Anzahl geordneter Kombinationen von r Elementen einer Menge $\mathcal{A}$ mit n Elementen mit zugelassener Wiederholung ist n^r.

Definition 1.2.4. Es sei $\mathcal{A}$ eine Menge. Eine Folge von r verschiedenen Elementen von $\mathcal{A}$ heißt r- Permutation von $\mathcal{A}$.

Satz 1.2.5. *Es sei $|\mathcal{A}| = n$ und $r \leq n$.*
Die Anzahl der r- Permutationen von $\mathcal{A}$ ist $n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-r+1)$.

Beweis. Wir konstruieren die r- Permutation in einer Folge von Schritten:

1. Schritt	Wahl des 1. Elements:	n Möglichkeiten
2. Schritt	Wahl des 2. Elements:	$n-1$ Möglichkeiten
$\vdots$		$\vdots$
r. Schritt	Wahl des r. Elements:	$n-r+1$ Möglichkeiten

Gesamtzahl: $n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-r+1)$ Möglichkeiten □

Ein wichtiger Spezialfall von Satz 1.2.5 ist der Fall $n = r$:

Definition 1.2.6. Eine bijektive Abbildung einer Menge $\mathcal{A}$ auf sich selbst heißt Permutation von $\mathcal{A}$.

Definition 1.2.7. Es sei $n \in \mathbb{N}$. Unter der Fakultät von n verstehen wir: $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$.

Satz 1.2.8. *Es sei $|\mathcal{A}| = n$. Die Anzahl der Permutationen von $\mathcal{A}$ ist $n!$.*

Beweis. Dies ergibt sich als Spezialfall $r = n$ des Satzes 1.2.5. □

Wir betrachten nun die Situation, daß die Menge der zu permutierenden Elemente aus Gruppen nicht unterschiedbarer Elemente besteht.

Beispiel 1.2.9. Wieviele Möglichkeiten gibt es, das Wort „Mississippi“ zu permutieren?

Lösung: Die Menge der elf Buchstaben des Wortes zerfällt in Gruppen von vier nicht unterschiedbaren Buchstaben: vier Buchstaben i, vier Buchstaben s, zwei Buchstaben p und einem Buchstaben m.
Wir machen die Buchstaben durch Numerierung unterscheidbar. Eine mögliche Permutation ist dann z.B.: $i_2\ s_3\ m_1\ i_1\ s_1\ s_4\ s_2\ i_3\ p_2\ i_4\ p_1$. Die Anzahl dieser Permutationen ist 11!
Zu jeder dieser Permutationen gehören $4! \cdot 4! \cdot 2! \cdot 1!$ Permutationen, die nach Entfernung der Nummern dasselbe Wort ergeben. Die Gesamtzahl ist daher $\dfrac{11!}{4! \cdot 4! \cdot 2! \cdot 1!}$.

Satz 1.2.10. *Es sei $\mathcal{A}$ eine Menge mit $|\mathcal{A}| = n$, die aus Gruppen der Größen $n_1, \ldots, n_r$ von ununterscheidbaren Elementen besteht.*
Die Anzahl der Permutationen von $\mathcal{A}$ ist $\dfrac{n!}{n_1! \cdot \ldots \cdot n_r!}$.

Definition 1.2.11. Es sei $\mathcal{A}$ eine endliche Menge mit $|\mathcal{A}| = n$; es sei $r \in \mathbb{N}$. Eine r- elementige Teilmenge von $\mathcal{A}$ heißt r- Kombination von $\mathcal{A}$.

Satz 1.2.12. *Für eine endliche Menge $\mathcal{A}$ mit $|\mathcal{A}| = n$, $r \in \mathbb{N}$ gilt: Die Anzahl der r- Kombinationen von $\mathcal{A}$ ist $\binom{n}{k}$.*

Beweis. Wir betrachten die Abbildung $f : (m_1, \ldots, m_r) \to \{m_1, \ldots, m_r\}$, die jeder r- Permutation von $\mathcal{A}$, die Menge der in der r- Permutation vorkommenden Elemente zuordnet. Da die Elemente von $\{m_1, \ldots, m_r\}$ auf $r!$ verschiedene Weisen angeordnet werden können, gibt es $r!$ der r- Permutationen, die von f auf eine feste Menge $\{m_1, \ldots, m_r\}$ abgebildet werden. Daher ist die Anzahl der r-Permutationen eben $r!$ mal der Anzahl der r- Kombinationen. Diese Anzahl ist nach Satz 1.2.5 gleich $n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-r+1)$. □

Definition 1.2.13. Es sei $\mathcal{A}$ eine endliche Menge, $r \in \mathbb{N}$. Ein r- tupel von Elementen aus $\mathcal{A}$ ohne Anordnung heißt r- Auswahl von $\mathcal{A}$.

Satz 1.2.14. *Es seien $n, r \in \mathbb{N}$ und $\mathcal{A}$ eine endliche Menge mit $|\mathcal{A}| = n$.*
Die Anzahl der r- Auswahlen von $\mathcal{A}$ ist $\binom{n+r-1}{r} = \binom{n+r-1}{n-1}$.

Beweis. Es sei O.B.d.A. $\mathcal{A} = \{1, 2, \ldots, n\}$.
In den r- Auswahlen von $\mathcal{A}$ ordnen wir die Elemente der Größe nach und vergrößern die Folge, indem wir jedes der Elemente $1, 2, \ldots, n$ einmal hinzufügen. Zum Beispiel wird die 4- Auswahl 2 3 3 5 der Menge $\mathcal{A} = \{1, 2, \ldots, 6\}$ zu der Folge 1 2 2 3 3 3 4 5 5 6 der Länge $4 + 6 = 10$ vergrößert. Die Anzahl der r- Auswahlen von $\mathcal{A}$ ist somit gleich der Anzahl der Folgen von Elementen von $\mathcal{A}$ der Länge $n+r$, die der Größe nach geordnet sind und in der jedes der Elemente $1, 2, \ldots, n$ von $\mathcal{A}$ mindestens einmal vorkommt. Eine solche Folge kann auf die folgende Weise konstruiert werden: wir geben uns $n + r$ leere Zellen vor und setzen in die $n + r - 1$ Zwischenräume $n - 1$ Trennungsstriche. Vor den ersten Trennungsstrich schreiben wir Einsen, zwischen den ersten und den zweiten Zweien,..., hinter dem $n - 1$- ten die Zahl n in der passenden Vielfachheit.
Die obige Folge 1 2 2 3 3 3 4 5 5 5 6 wird zum Beispiel erhalten, indem Trennungsstriche in den ersten, dritten, sechsten, siebten und zehnten Zwischenräumen gesetzt werden.
Die Anzahl der Möglichkeiten, die Trennungsstriche zu setzen, ist $\binom{n+r-1}{n-1}$.
Damit ist Satz 1.2.14 bewiesen. □

Das Problem der r- Auswahlen kann auch in anderer Gestalt auftreten:

Beispiel 1.2.15. Bestimme die Anzahl der nichtnegativen ganzzahligen Lösungen von

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 45 \qquad (*)$$

Lösung:
Wir definieren eine Bijektion zwischen der Menge der Lösungen von $(*)$ und der Menge der 45- Auswahlen von $\{1, \ldots, 5\}$ wie folgt:
Kommt die Zahl $i \in \{1, \ldots, 5\}$ in der 45- Auswahl x_i- mal vor, so ordnen wir dieser 45- Auswahl das 5- tupels $(x_1, x_2, \ldots, x_5)$.
Beide Mengen haben gleichviele Elemente: nach Satz 1.2.14 sind es $\binom{49}{45} = \binom{49}{4}$.

1.3 Das Einschluß- Ausschluß- Prinzip

Beispiel 1.3.1. Von einer Gruppe von 30 Studenten sprechen 20 englisch, 15 französisch und elf spanisch. Dabei sprechen zehn englisch und französisch, sechs englisch und spanisch, fünf französisch und spanisch und zwei Studenten sprechen alle drei Fremdsprachen.
Wie viele Studenten gibt es, die keine dieser drei Fremdsprachen sprechen?

Lösung:
Wir haben eine Menge $\mathcal{M}$, die Menge der Studenten, und drei Teilmengen $\mathcal{M}_1$, die Menge der englisch sprechenden Studenten, $\mathcal{M}_2$, die Menge der französisisch sprechenden Studenten und $\mathcal{M}_3$, die Menge der spanisch sprechenden Studenten, vorliegen. Die Mächtigkeiten von $\mathcal{M}$, den Teilmengen $\mathcal{M}_\nu$, $\nu = 1, 2, 3$, und sämtlicher Durchschnitte sind bekannt. Gesucht ist die Anzahl der Studenten, die keiner der Teilmengen angehören.

1. Schritt: Wir finden $|\mathcal{M}| - |\mathcal{M}_1| - |\mathcal{M}_2| - |\mathcal{M}_3| = -16$. In diesem Ausdruck werden alle Studenten, die keiner oder einer der drei Teilmengen angehören, korrekt gezählt, nämlich mit Gewicht 0 oder 1. Hingegen werden die Studenten, die zwei Mengen angehören, mit Gewicht -1, und diejenigen, die allen drei Teilmengen angehören mit Gewicht -2 gezählt.
2. Schritt: In $|\mathcal{M}| - |\mathcal{M}_1| - |\mathcal{M}_2| - |\mathcal{M}_3| + |\mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_2| + |\mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_3| + |\mathcal{M}_2 \cap \mathcal{M}_3|$ werden nun alle Studenten, die höchstens zwei Teilmengen angehören, korrekt gezählt.
Die korrekte Anzahl ergibt sich schließlich als $|\mathcal{M}| - |\mathcal{M}_1| - |\mathcal{M}_2| - |\mathcal{M}_3| + |\mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_2| + |\mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_3| + |\mathcal{M}_2 \cap \mathcal{M}_3| - |\mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_2 \cap \mathcal{M}_3|$.
In diesem Fall sind es drei Studenten, die keine der drei Fremdsprachen sprechen.

Gegeben sei eine endliche Menge $\mathcal{M}$ sowie k Teilmengen $\mathcal{M}_\nu \subset \mathcal{M}$ für $\nu = 1, \ldots, k$ und eine Gewichtsfunktion $w : \mathcal{M} \to \mathbb{C}$.
Wir setzen

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_{\nu_1,\ldots,\nu_r} &= \mathcal{M}_{\nu_1} \cap \ldots \cap \mathcal{M}_{\nu_r} \text{ für } 1 \le \nu_1, \ldots, \nu_r \le k, \\
w_{\nu_1,\ldots,\nu_r} &= \sum_{a \in \mathcal{M}_{\nu_1,\ldots,\nu_r}} w(a), \\
W(r) &= \sum_{1 \le \nu_1 < \ldots < \nu_r \le k} w_{\nu_1,\ldots,\nu_r}, \\
E_r &= \{a \in \mathcal{M} |\ a \in \mathcal{M}_\nu \text{ genau } r - \text{ mal}\}, \\
E(r) &= \sum_{a \in E_r} w(a), \\
E(0) &= \sum_{\substack{a \in \mathcal{M} \\ a \notin \mathcal{M}_\nu,\ \forall \nu = 1,\ldots,k}} w(a).
\end{aligned}$$

Satz 1.3.2. *(Einschluß- Ausschluß- Prinzip)*
Für $0 \le r \le k$ haben wir

$$E(r) = \sum_{s=r}^{k} (-1)^{s-r} \binom{s}{r} W(s) \qquad (*)$$

Korollar 1.3.3. *Es gilt:*

(i) $E(0) = \sum_{s=0}^{k} (-1)^s W(s)$

(ii) $|\mathcal{M} \setminus \cup_{\nu=1}^{k} \mathcal{M}_\nu| = |\mathcal{M}| - \sum_{\nu=1}^{k} |\mathcal{M}_\nu| + \ldots + (-1)^s \sum_{1 \le \nu_1 \le \ldots \le \nu_s \le k} |\mathcal{M}_{\nu_1,\ldots,\nu_r}| + \ldots + (-1)^k |\mathcal{M}_{1,\ldots,k}|.$

Für den Beweis benötigen wir:

Lemma 1.3.4.

$$\sum_{s=r}^{t} (-1)^{s-r} \binom{s}{r} \binom{t}{s} = \begin{cases} 0, & \textit{falls} \quad t > r \\ 1, & \textit{falls} \quad t = r. \end{cases}$$

Beweis. Nach dem Binomischen Lehrsatz haben wir

$$f(x) := (1+x)^t = \sum_{s=0}^{t} \binom{t}{s} x^s$$

Anschließende r- malige Differentiation ergibt:

$$f^r(x) = t\cdot(t-1)\cdot\ldots\cdot(t-r+1)\cdot(1+x)^{t-r} = \sum_{s=r}^{t} s\cdot(s-1)\cdot\ldots\cdot(s-r+1)\binom{t}{s}x^{s-r} = r!\sum_{s=r}^{t}\binom{s}{r}\binom{t}{s}x^{s-r}.$$

Einsetzen von $x=-1$ ergibt die Behauptung. □

Beweis. Beweis von Satz 1.3.2
Wir betrachten die rechte Seite von $(*)$:

$$\begin{aligned}
\sum_{s=r}^{k}(-1)^{s-r}\binom{s}{r}W(s) &= \sum_{s=r}^{k}(-1)^{s-r}\binom{s}{r}\sum_{1\le\nu_1\le\ldots\le\nu_s\le k}\ \sum_{a\in\mathcal{M}_{\nu_1,\ldots,\nu_s}} w(a)\\
&= \sum_{s=r}^{k}(-1)^{s-r}\binom{s}{r}\sum_{1\le\nu_1\le\ldots\le\nu_s\le k}\ \sum_{l=0}^{k}\ \sum_{\substack{a\in\mathcal{M}_{\nu_1,\ldots,\nu_s}\\ a\in E_l}} w(a)\\
&= \sum_{l=0}^{k}\sum_{a\in E_l} w(a)\sum_{s=r}^{k}(-1)^{s-r}\binom{s}{r}\sum_{\substack{1\le\nu_1\le\ldots\le\nu_s\le k\\ a\in\mathcal{M}_{\nu_1,\ldots,\nu_s}}} 1\\
&= \sum_{l=0}^{k}\sum_{a\in E_l} w(a)\sum_{s=r}^{l}(-1)^{s-r}\binom{s}{r}\binom{l}{s}.
\end{aligned}$$

□

Beispiel zum Einschluß- Ausschluß- Prinzip:

Definition 1.3.5. Wir schreiben γ_n für die Menge der Permutationen von $\mathbb{N}_n = \{1,2,\ldots,n\}$.
Die Zahl m heißt Fixpunkt der Permutation $\pi\in\mathbb{N}_n$, wenn $\pi(m)=m$ gilt.
Es sei $\mathcal{F}^{(0)}$ die Menge der fixpunktfreien Permutationen.
Bestimme $|\mathcal{F}^{(0)}|$.

Lösung:
Wir betrachten die Menge $\mathcal{F}_j$ der Permutationen mit Fixpunkt j, d.h. $\mathcal{F}_j = \{\pi:\ \pi(j)=j\}$.
Dann ist nach dem Einschluß- Ausschluß- Prinzip

$$|\mathcal{F}^{(0)}| = |\gamma_n| - |\mathcal{F}_1| - \ldots - |\mathcal{F}_n| + |\mathcal{F}_1\cap\mathcal{F}_2| + \ldots + |\mathcal{F}_{n-1}\cap\mathcal{F}_n| + \ldots \qquad (*)$$

$$+(-1)^k \sum_{j_1<\ldots<j_k} |\mathcal{F}_{j_1}\cap\ldots\cap\mathcal{F}_{j_k}| + \ldots + (-1)^n|\mathcal{F}_1\cap\ldots\cap\mathcal{F}_n|.$$

Wir bestimmen $|\mathcal{F}_{j_1}\cap\ldots\cap\mathcal{F}_{j_n}|$:
Die Permutation $\pi\in\mathcal{F}_{j_1}\cap\ldots\cap\mathcal{F}_{j_k}$ ist von der Form

$$\pi = \begin{pmatrix} \cdots & j_1 & \cdots & j_2 & \cdots & j_k & \cdots\\ \cdots & j_1 & \cdots & j_2 & \cdots & j_k & \cdots \end{pmatrix}$$

Jedes π entspricht somit umkehrbar eindeutig einer Permutation der Menge $\mathbb{N}_n - \{j_1,\ldots,j_k\}$.
Folglich ist

$$|\mathcal{F}_{j_1}\cap\ldots\cap\mathcal{F}_{j_k}| = (n-k)!$$

Die Anzahl der k-tupel $(j_1, \ldots, j_k)$ ist

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

und damit ist

$$\sum_{j_1 < \ldots < j_k} |\mathcal{F}_{j_1} \cap \ldots \cap \mathcal{F}_{j_k}| = \frac{n!}{k!}.$$

Aus $(*)$ erhalten wir

$$|\mathcal{F}^{(0)}| = n! \cdot \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{(-1)^k}{k!} + \ldots + \frac{(-1)^n}{n!}\right).$$

Von der aus der Taylorreihe der Exponentialfunktion folgenden Reihendarstellung

$$e^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = 1 - \frac{1}{1!} + \ldots + \frac{(-1)^n}{n!} + \ldots$$

sieht man, daß $n! \cdot e^{-1}$ für große n eine gute Approximation für $|\mathcal{F}^{(0)}|$ darstellt.

Kapitel 2

Erzeugende Funktionen

2.1 Gewöhnliche Erzeugende Funktionen und Rekursionen

Definition 2.1.1. Es sei (a_n) mit $0 \leq n < \infty$ eine Folge komplexer Zahlen, x sei ein Symbol. Unter einer formalen Potenzreihe in x versteht man einen Ausdruck der Form $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

Unter der Summe zweier formaler Potenzreihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ versteht man die formale Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) x^n$, unter dem Produkt die formale Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \right) x^n$.

Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ heißt auch die (gewöhnliche) erzeugende Funktion der Folge (a_n).

Bemerkung 2.1.2. In der Analysis wird untersucht, welche Werte Potenzreihen annehmen, wenn für x spezielle (reelle oder komplexe) Zahlen eingesetzt werden. Insbesondere wird der Konvergenzbereich untersucht. In der Definition der formalen Potenzreihen spielen Konvergenzfragen keine Rolle. Es ist möglich, daß $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ nur für $x = 0$ konvergiert. Konvergiert die Potenzreihe jedoch noch für andere x, so können ihre analytischen Eigenschaften oft genutzt werden, um Informationen über das Verhalten der Folge (a_n) zu gewinnen.

Definition 2.1.3. Eine Rekursionsformel für die Folge (a_n) ist eine Relation der Form $a_n = f_n(a_0, \ldots, a_{n-1})$ für $n \geq n_0 \in \mathbb{N}$.
Man nennt sie r- gliedrig, falls $a_k = f_k(a_{k-r}, \ldots, a_{k-1})$ für $k \geq n_0 \geq r$.

Es bestehen nun viele Beziehungen zwischen Anzahlproblemen, Rekursionen und Erzeugenden Funktionen:

Beispiel 2.1.4. Ein „Schachbrett“ mit $n \times 2$ Feldern soll mit Dominos der Länge zwei Felder und Breite ein Feld überdeckt werden. Wie viele Möglichkeiten gibt es?

Lösung:
Es sei $F(n)$ die Anzahl der Überdeckungen. Es ist offenbar $F(1) = 1$ und $F(2) = 2$. Es sei nun $n \geq 3$. Indem wir die Fälle unterscheiden, ob das Ende des Bretts durch ein senkrechtes Domino oder mittels zweier waagrechter Dominos überdeckt wird, erhalten wir die Rekursion

$$F(n) = F(n-1) + F(n-2).$$

Wenn wir $F(0) = 1$ definieren, sehen wir, daß diese Rekursion auch für $n = 2$ gilt.
Wir erhalten die Folge der Fibonacci- Zahlen, gegeben durch

$$F(0) = F(1) = 1 \tag{1}$$

$$F(n) = F(n-1) + F(n-2) \tag{2}$$

Zur Untersuchung dieser Folge betrachten wir die Erzeugende Reihe $f(x)$ von $F(n)$:
Mit (1) und (2) erhalten wir:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} F(n)x^n = 1 + x + \sum_{n=2}^{\infty} \left(F(n-1) + F(n-2)\right) x^n.$$

Es ist

$$\sum_{n=2}^{\infty} F(n-1)x^n = x \cdot \sum_{n=2}^{\infty} F(n-1)x^{n-1} = x \cdot \sum_{n=1}^{\infty} F(n)x^n = x \cdot (f(x) - 1)$$

und

$$\sum_{n=2}^{\infty} F(n-2)x^n = x^2 \cdot \sum_{n=2}^{\infty} F(n-2)x^{n-2} = x^2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} F(n)x^n = x^2 \cdot f(x).$$

Damit ergibt sich also:

$$f(x) = 1 + x \cdot f(x) + x^2 \cdot f(x) \text{ oder } (1 - x - x^2) \cdot f(x) = 1. \tag{3}$$

Damit hat die formale Potenzreihe $f(x)$ dieselben Koeffizienten wie die für hinreichend kleine $|x|$ konvergente Potenzreihe der Funktion $\tilde{f}(x) = \dfrac{1}{1 - x - x^2}$.
Wir ermitteln die Koeffizienten mittels Partialbruchzerlegung:
Die Gleichung $x^2 + x - 1 = 0$ wird durch $x = -\alpha_1 = -\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ und $x = -\alpha_2 = -\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ gelöst.
Somit ist $x^2 + x - 1 = (x + \alpha_1) \cdot (x + \alpha_2)$.
Der Ansatz $\tilde{f}(x) = \frac{A}{x+\alpha_1} + \frac{B}{x+\alpha_2}$ ergibt $A(\alpha_1 - \alpha_2) = B(\alpha_2 - \alpha_1) = -1$, also $\tilde{f}(x) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1}{x+\alpha_2} - \frac{1}{x+\alpha_1} \right)$.
Wegen $\alpha_1 \cdot \alpha_2 = -1$ erhalten wir

$$\tilde{f}(x) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{\alpha_1}{1 - \alpha_1 x} - \frac{\alpha_2}{1 - \alpha_2 x} \right) = \frac{1}{\sqrt{5}} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\alpha_1^{n+1} - \alpha_2^{n+1} \right) x^n.$$

Folglich ist

$$F(n) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right)$$

für $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Wir wollen im folgenden das Konzept der gewichteten Objekte besprechen, mit dem viele Fälle behandelt werden können.

Definition 2.1.5. Es sei $\mathcal{M}$ eine Menge von Objekten. Man nennt $\mathcal{M}$ eine gewichtete Menge mit Gewichtsfunktion w, wenn jedem $l \in \mathcal{M}$ eine nichtnegative ganze Zahl $w(l)$ als Gewicht zugeordnet ist und die Anzahl a_n der Objekte mit Gewicht n stets endlich ist. Dann heißt die formale Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ die aufzählende Reihe von $\mathcal{M}$ nach dem Gewicht w.

Beispiel 2.1.6. In $A(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$ ist der Koeffizient von x^k die Anzahl der k- elementigen Teilmengen von $\{1, \ldots, n\}$. Damit ist $A(x)$ die aufzählende Reihe der Menge von Teilmengen von $\{1, \ldots, n\}$ nach ihrer Mächtigkeit.

Satz 2.1.7. *Es seien A, B, C gewichtete Mengen mit $C = A \times B$ und Gewichtsfunktionen w_A, w_B, w_C, und es sei $w_C(\gamma) = w_A(\alpha) + w_B(\beta)$, falls $\gamma = (\alpha, \beta) \in A \times B$ ist.*
Sind $A(x)$, $B(x)$ und $C(x)$ die aufzählenden Reihen von A, B und C nach den Gewichten w_A, w_B und w_C, so ist $C(x) = A(x)B(x)$.

Beispiel 2.1.8. In einem Schrank stehen zehn 1-Kilo-, sieben 2-Kilo- und ein 10-Kilo- Gewicht. Es sei c_n die Anzahl der Weisen, daraus ein Gesamtgewicht von n Kilo zu kombinieren. Gib die erzeugende Reihe von (c_n) an.

Lösung:
Es seien A, B und C die Mengen der Gewichte, die 1 kg, 2 kg bzw. 10 kg wiegen. Dann ist

$$A(x) = 1 + x + \ldots + x^{10},\ B(x) = 1 + x^2 + x^4 + \ldots + x^{14},\ C(x) = 1 + x^{10}.$$

Dann ist

$$D(x) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n = A(x)B(x)C(x).$$

Beispiel 2.1.9. Es sei $A = \{0, 1\}$ und $C = A^n = \underbrace{A \times \ldots \times A}_{n-mal}$. Die Gewichtsfunktion w von A sei gegeben durch $w(0) = 0$ und $w(1) = 1$. Für ein n- tupel $\gamma = (x_1, \ldots, x_n)$, $x_i \in (0, 1)$ sei $w_C(\gamma) = w(x_1) + \ldots + w(x_n)$ die Anzahl der Einsen in γ. Die aufzählende Reihe von A ist $A(x) = 1 + x$. Nach Satz 2.1.7 ist damit die aufzählende Reihe von C nach der Anzahl der Einsen:

$$C(x) = (1 + x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k.$$

Wir haben somit für unser Resultat wiederentdeckt, daß die Anzahl der n- tupel mit k Einsen oder die Anzahl der k- elementigen Teilmengen von $\mathbb{N}_n$ durch den Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$ gegeben ist.

Beispiel 2.1.10. In der Ebene sei ein kartesisches Koordinatensystem gegeben. Wie viele Möglichkeiten gibt es, von $(0, 0)$ nach (n, n) zu wandern, wenn nur Schritte der Länge 1 nach rechts und nach oben zugelassen sind und der Pfad nie oberhalb der Geraden $y = x$ verlaufen darf?

Lösung:
Es sei c_n die Anzahl der Möglichkeiten. Offenbar ist $c_0 = c_1 = 1$. Jeder Pfad hat einen ersten Rückkehrpunkt zur Diagonalen. Dieser sei der Punkt (k, k). Dieser Pfad beginnt mit einem Schritt nach rechts und überquert die Linie $y = x - 1$ nicht, bis er $(k, k - 1)$ erreicht. Deshalb existiert eine Bijektion zwischen den möglichen Anfangsstücken des Pfades und den zulässigen Pfaden von $(0, 0)$ zu $(k - 1, k - 1)$. Weiter existiert eine Bijektion zwischen den Endstücken (von (k, k) nach (n, n)) und den zulässigen Pfaden von $(0, 0)$ nach $(n - k, n - k)$. Die Anzahl aller zulässiger Pfade von $(0, 0)$ nach (n, n), die zuerst in (k, k) zur Diagonalen zurückkehren, ist daher $c_{k-1}c_{n-k}$.
Summation über k ergibt die Rekursion $c_n = \sum_{k=1}^{n} c_{k-1}c_{n-k}$ für $n \geq 1$ oder

$$c_n = \sum_{k=0}^{n-1} c_k c_{n-1-k}, \quad c_0 = 1 \tag{1}$$

Es sei $C(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ die erzeugende Reihe von (c_n). Aus (1) erhalten wir

$$C(x) - 1 = x \cdot C(x)^2. \tag{2}$$

Wir suchen eine analytische Funktion, die die Gleichung (2) erfüllt.
Die Lösungsformel für die quadratische Gleichung ergibt:

$$C(x) = \frac{1 \pm \sqrt{1-4x}}{2x}. \tag{3}$$

Mittels der binomischen Reihe erhalten wir $(1-4x)^{1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/2}{n} (-4)^n x^n$. Da der Koeffizient von x^{-1} in (3) gleich null sein muß, kommt nur das Minuszeichen in Frage. Wir erhalten:

$$\begin{aligned} C_n &= -1/2 \binom{1/2}{n+1} (-4)^{n+1} = \frac{-2^n}{n+1)!} (-2)^{n+1} \prod_{i=0}^{n} (1/2 - i) = \frac{-2^n}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n} (2i-1) \\ &= \frac{1}{n+1} \cdot \frac{\prod_{i=1}^{n} (2i-1)}{n!} \cdot \frac{\prod_{i=1}^{n} 2i}{\prod_{i=1}^{n} i} = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{n!} \cdot \frac{2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 2n}{n!} \\ &= \frac{1}{n+1} \frac{(2n)!}{n! \cdot n!} = \frac{1}{n+1} \frac{2n \cdot (2n-1) \cdot \ldots \cdot (n+1)}{n!} = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} \end{aligned}$$

Die c_n heißen auch Catalan- Zahlen.

2.2 Exponentielle Erzeugende Funktionen

Während die gewöhnlichen Erzeugenden Funktionen dazu geeignet sind, Anzahlprobleme zu behandeln, die Kombinationen betreffen, bei denen es auf die Anordnung der Elemente nicht ankommt, sind exponentielle erzeugende Funktionen bei der Behandlung von Problemen mit Anordnung von Bedeutung.

Definition 2.2.1. Die exponentielle erzeugende Funktion (EGF) $E(x)$ einer Folge (a_n) ist $E(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^n}{n!}$.

Satz 2.2.2. *Es seien A, B und C endliche Mengen von Urnen. Für jede Urne U sei eine Menge $\mathcal{M}(U)$ von nichtnegativen ganzen Zahlen gegeben. Es seien a_k, b_k bzw. c_k die Anzahl der Weisen, k Objekte auf die Urnen von A, B bzw. C so zu verteilen, daß die Zahl der Objekte in jeder Urne der Menge $\mathcal{M}(U)$ angehört.*
Es seien $A(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{x^k}{k!}$, $B(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k \frac{x^k}{k!}$ und $C(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \frac{x^k}{k!}$ die EGF der Folgen (a_k), (b_k) bzw. (c_k).
Dann ist $C(x) = A(x)B(x)$.

Beweis. Gegeben seien n Objekte. Dann sollen k Objekte auf die Urnen von A und $n-k$ Objekte auf die Urnen von B verteilt werden. Die k Objekte für die Urnen von A können auf $\binom{n}{k}$ Weisen

ausgewählt werden. Die Verteilung kann dann auf $\binom{n}{k}a_k b_{n-k}$ Weisen geschehen. Daraus ergibt sich: $c_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k b_{n-k}$. Es ist dann

$$A(x)B(x) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{x^k}{k!}\right)\left(\sum_{l=0}^{\infty} b_l \frac{x^l}{l!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k b_{n-k}}{k!(n-k)!}\right) x^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k b_{n-k}\right) \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n!} x^n = C(x)$$

□

Beispiel 2.2.3. Auf wie viele Arten können n Objekte auf zwei Urnen verteilt werden, wenn die erste Urne höchstens zwei Objekte und die zweite höchstens drei enthalten darf?

Lösung:
Die EGF für die beiden Urnen ist $A(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!}$ und $B(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}$. Die EGF für beide Urnen ist also $C(x) = A(x)B(x) = 1 + 2x + 4\frac{x^2}{2!} + 7\frac{x^3}{3!} + 10\frac{x^4}{4!} + 10\frac{x^5}{5!}$.
Die Anzahl c_n der Arten n Objekte zu verteilen, ist also $c_0 = 1$, $c_1 = 2$, $c_2 = 4$, $c_3 = 7$ und $c_4 = c_5 = 10$.

Definition 2.2.4. Es sei $k \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}_0$. Die Stirlingzahl (der 2. Art) $S(n,k)$ ist die Anzahl der Weisen, n verschiedene Objekte in k Teilmengen aufzuteilen.

Satz 2.2.5. *Es ist*

$$S(n,k) = \frac{1}{k!}\sum_{i=0}^{k}(-1)^i \binom{k}{i}(k-i)^n$$

Beweis. Wir fassen die Teilmengen als Urnen auf. Um Satz 2.2.2 anwenden zu können, machen wir die Urnen zunächst durch Anbringen von Marken unterscheidbar. Die EGF für jede einzelne Urne ist $E_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$. Wir können $E_1(x)$ als analytische Potenzreihe auffassen und haben $E_1(x) = e^x - 1$ für alle x. Die EGF für alle k- Urnen ist dann nach Satz 2.2.2:

$$E_k(x) = (e^x - 1)^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i}(-1)^i e^{x(k-i)} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{k}(-1)^i \binom{k}{i}(k-i)^n \frac{x^n}{n!}.$$

Die Anzahl der Weisen, k Objekte auf n markierte Urnen zu verteilen, ist also $\sum_{i=0}^{k}(-1)^i \binom{k}{i}(k-i)^n$. Indem wir durch $k!$, die Anzahl der Anordnungen der Urnen, dividieren, erhalten wir das Ergebnis. □

Kapitel 3

Partitionen

3.1 Partitionen

Definition 3.1.1. Eine (geordnete) Partition einer natürlichen Zahl n ist eine Darstellung von n in der Form $n = x_1 + x_2 + \ldots + x_k$ mit $x_i > 0$ für $i = 1, \ldots, k$ und $x_1 \geq x_2 \geq \ldots \geq x_k$.
Es ist $p(n)$ die Anzahl der Partitionen von n. Wir definieren $p(0) = 1$.

Beispiel 3.1.2. Sämtliche Partitionen von $n = 5$ sind gegeben durch:

$$\begin{aligned} 5 &= 5 \\ 5 &= 4+1 \\ 5 &= 3+2 \\ 5 &= 3+1+1 \\ 5 &= 2+2+1 \\ 5 &= 2+1+1+1 \\ 5 &= 1+1+1+1+1 \end{aligned}$$

Also ist $p(5) = 7$.

Definition 3.1.3. Das Ferrers- Diagramm einer Partition $n = x_1 + \ldots + x_k$ mit $x_1 \geq \ldots \geq x_k$ ist ein Punktmuster, das aus k Zeilen von Punkten besteht, wobei die k- te Zeile x_i Punkte enthält.
Die zu einer Partition $\mathcal{P}$ von n konjugierte Partition $\mathcal{P}^c$ ist diejenige Partition, deren Ferrers- Diagramm man aus dem von $\mathcal{P}$ enthält, indem man Zeilen und Spalten vertauscht.
Eine Partition $\mathcal{P}$, die zu sich selbst konjugiert ist, heißt selbstkonjugiert.

Beispiel 3.1.4. Die Partition $\mathcal{P}$ von 13 sei gegeben durch: $13 = 4+3+3+2+1$. Sie hat das Ferrers-Diagramm:

$$\begin{array}{llll} x & x & x & x \\ x & x & x & \\ x & x & x & \\ x & x & & \\ x & & & \end{array}$$

Die dazu konjugierte Partition $\mathcal{P}^c$ hat das Ferrers- Diagramm:

$x \quad x \quad x \quad x \quad x$
$x \quad x \quad x \quad x$
$x \quad x \quad x$
x

Somit ist $\mathcal{P}^c$ die Partition: $13 = 5 + 4 + 3 + 1$.
Die Partition $13 = 5 + 3 + 3 + 1 + 1$ ist selbstkonjugiert.

Manche Identität kann mittels des Konzepts der konjugierten Partition bewiesen werden.
Ein erstes Beispiel lautet:

Satz 3.1.5. *Die Anzahl der Partitionen von n mit genau (bzw. höchstens) k Summanden ist gleich der Anzahl der Partitionen von n mit größtem Summand k (bzw. höchstens k).*

Beweis. Die Abbildung $\mathcal{P} \to \mathcal{P}^c$ liefert eine Bijektion von der Menge aller Partitionen von n mit genau k Summanden (längste Spalte im Ferrers- Diagramm hat die Länge k) auf die Menge aller Partitionen mit größtem Summanden k (längste Zeile im Ferrers- Diagramm hat die Länge k). □

Im folgenden betrachten wir nun erzeugende Funktionen für verschiedene Typen von Partitionen. Wir betrachten diese als formale Potenzreihen und untersuchen die Frage, für welche Werte von x die Reihen konvergieren und für welche nicht.

Definition 3.1.6. Wir werden verschiedentlich Folgen von formalen Potenzreihen antreffen:

$$A_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k,n} x^k.$$

In diesen Fällen werden die Folgen $a_{k,n}$ stets von einem Index $n_0(k)$ an konstant in n sein, d.h. für alle k wird es $a_k \in \mathbb{C}$ und $n_0(k)$ geben, so daß $a_{k,n} = a_k$ für alle $n \geq n_0(k)$ gilt.
Dann setzen wir:

$$\lim_{n\to\infty} A_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k.$$

Für $j \in \mathbb{N}$ setzen wir:

$$(1 - x^j)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} x^{nj}.$$

Satz 3.1.7. *Die erzeugende Funktion der Partitionenfunktion ist*

$$p(x) = \prod_{j=1}^{\infty} (1 - x^j)^{-1}.$$

Beweis. Wir setzen

$$p(x, N) = \prod_{j=1}^{N} (1 - x^j)^{-1} = \prod_{j=1}^{N} (1 + x^j + x^{2j} + \ldots).$$

Der Koeffizient von x^n ist dann gleich der Anzahl der N- tupel $(b_1, \ldots, b_N)$ mit $b_i \in \mathbb{N}_0$ mit

$$b_1 \cdot 1 + \ldots + b_N \cdot N = n. \tag{1}$$

Dies ist aber gleich der Anzahl der Partitionen n in Summanden $\leq N$. Dies sieht man, wenn man (1) in der Form

$$\underbrace{N+\ldots+N}_{b_N-mal}+\underbrace{(N-1)+\ldots+(N-1)}_{b_{N-1}-mal}+\ldots+\underbrace{1+\ldots+1}_{b_1-mal}=n$$

schreibt.
Es ist also

$$p(x,N)=\sum_{n=0}^{\infty}p(n,N)x^n$$

mit $p(n,N)=p(n)$ für $n\leq N$.
Nach Definition 3.1.6 ist

$$p(x)=\lim_{N\to\infty}p(x,N)=\sum_{n=0}^{\infty}p(n)x^n.$$

□

Definition 3.1.8. Für $n\in\mathbb{N}$ sei $p_g(n)$ die Anzahl der Partitionen von n mit einer geraden Anzahl von verschiedenen Summanden und $p_u(n)$ die Anzahl der Partitionen von n mit einer ungeraden Anzahl verschiedener Summanden.
Es sei $c(n)=p_g(n)-p_u(n)$ und $c(0)=0$.

Satz 3.1.9. *Die erzeugende Funktion der Folge* $(c(n))$ *ist*

$$\Phi(x)=\prod_{j=1}^{\infty}(1-x^j).$$

Beweis. Wir setzen $\Phi(x,N)=\prod_{j=1}^{N}(1-x^j)$. Der Koeffizient von x^n ist dann $c(n,N)=p_g(n,N)-p_u(n,N)$, wobei $p_g(n,N)$ bzw. $p_u(n,N)$ die Darstellungen von n in der Form $j_1+\ldots+j_l=n$ mit $j_1>\ldots>j_l$ und geradem bzw. ungeradem l sind. Da $c(n,N)\geq c(n)$ für $N\geq n$ gilt, folgt $\lim_{N\to\infty}\Phi(x,N)=\Phi(x)$, also $\Phi(x)=\prod_{j=1}^{\infty}(1-x^j)$ nach Definition 3.1.6. □

Satz 3.1.10. *(Eulersche Identität):*

$$\prod_{j=1}^{\infty}(1-x^j)=1+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\left(x^{(3k^2-k)/2}+x^{(3k^2+k)/2}\right)$$

Beweis. Wir betrachten das Ferrers- Diagramm einer Partition von n in ungleiche Teile

$x\quad x\quad x\quad x\quad x\quad x\quad C$
$x\quad x\quad x\quad x\quad x$
$x\quad x\quad x\quad x$
$x\quad x$

Die unterste Zeile des Diagramms nennen wir die Basis des Diagramms. Von dem Punkt C in der rechten oberen Ecke zeichnen wir die längstmögliche Linie der Steigung 1 durch Punkte unseres Diagramms (diese Linie enthält möglicherweise nur C als einzigen Punkt). Wir nennen diese Linie die Schräge. Die Basis habe die Länge b, die Schräge die Länge s.

Im folgenden benutzen wir die Ideen der Basis und der Schräge, um (für fast alle natürlichen Zahlen) eine Bijektion zwischen der Menge $P_g(n)$, der Partitionen von n mit einer geraden Anzahl von verschiedenen Summanden, und der Menge $P_u(n)$, der Partitionen von n mit einer ungeraden Anzahl verschiedener Summanden, zu konstruieren.
Für diese n ist dann $c(n) = p_g(n) - p_u(n) = 0$.
Die Bijektion wird durch Anwendung einer Operation A auf die Ferrers- Diagramme der Partitionen erhalten.

(a) Falls $b \leq s$ und falls Basis und Schräge keinen Punkt gemeinsam haben:
Entferne die Punkte der Basis und füge deren Punkte an die Schräge an:

$$\begin{array}{cccccc} x & x & x & x & x & x \\ x & x & x & x & x & \\ x & x & x & x & & \\ x & x & & & & \end{array} \Rightarrow_{Operation\ A} \begin{array}{ccccccc} x & x & x & x & x & x & x \\ x & x & x & x & x & x & \\ x & x & x & x & & & \end{array}$$

Diese Operation A ist auch noch durchführbar, falls Basis und Schräge einen Punkt gemeinsam haben und $b \leq s - 1$ ist.

(b) Falls $b > s$ und falls Basis und Schräge keinen Punkt gemeinsam haben:
Entferne die Schräge und füge deren Punkte an die Basis an.
Die Operation A ist auch noch durchführbar, falls Basis und Schräge einen Punkt gemeinsam haben und falls $b \geq s + 2$.
Offenbar führt die Operation A jede Partition aus $P_g(n)$ in eine aus $P_u(n)$ über und umgekehrt.
Die Operation A ist ihre eigene Umkehrung.

Wir untersuchen nun diejenigen Partitionen, für die die Operation A nicht durchführbar ist: es sind dies die Fälle, in denen Basis und Schräge sich schneiden, und wenn gilt, daß entweder

$$\begin{array}{ccccccc} x & x & x & x & x & x & x \\ x & x & x & x & x & x & \\ x & x & x & x & x & & \\ x & x & x & x & & & \end{array}$$

(die obere Zeile hat $2k - 1$ Einträge, und es gilt $b = s = k$), oder

$$\begin{array}{cccccc} x & x & x & x & x & x \\ x & x & x & x & x & \\ x & x & x & x & & \end{array}$$

(In diesem Fall hat die erste Zeile $2k$ Einträge, die Basis $b = k + 1$, und es gilt $b - 1 = s = k$.)

Im ersten Fall ist $n = k+(k+1)+\ldots+(2k-1) = \frac{3k^2-k}{2}$ und im zweiten Fall $n = (k+1)+\ldots+2k = \frac{3k^2+k}{2}$.
Wir bezeichnen diese Ausnahmepartitionen mit $P_{ex}(n)$.

Zusammenfassend können wir sagen:
Ist n nicht von der Form $\frac{3k^2-k}{2}$ oder $\frac{3k^2+k}{2}$, so definiert A eine Bijektion von $P_g(n)$ auf $P_u(n)$. Daher ist $c_n = P_g(n) - P_u(n) = 0$.
Ist n von der Form $\frac{3k^2-k}{2}$ oder $\frac{3k^2+k}{2}$, so definiert A eine Bijektion von $P_g(n) - \{P_{ex}(n)\}$ auf $P_u(n)$, falls k gerade, und eine Bijektion von $P_g(n)$ auf $P_u(n) - \{P_{ex}(n)\}$, falls k ungerade ist.

Also ist $c_n = P_g(n) - P_u(n) = (-1)^k$, falls $n = \frac{3k^2 \pm k}{2}$.
Daraus folgt die Behauptung. □

Aus den Sätzen 3.1.7 und 3.1.10 folgt nun

$$\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left(x^{(3k^2-k)/2} + x^{(3k^2+k)/2}\right)\right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} p(n) x^n\right) = 1.$$

Durch Ausmultiplizieren ergibt sich sofort folgende Rekursion für die Partitionenfunktion:

Satz 3.1.11. *Es gilt:*

$$\begin{aligned} p(n) &= p(n-1) + p(n-2) - p(n-5) - p(n-7) \pm \dots \\ &\quad + (-1)^{k-1} p\left(n - \frac{3k^2-k}{2}\right) + (-1)^{k-1} p\left(n - \frac{3k^2+k}{2}\right) + \dots, \end{aligned}$$

wobei nur über die Argumente ≥ 0 *zu summieren und* $p(0) = 1$ *zu setzen ist.*

Satz 3.1.11 ist ein Mittel, $p(n)$ auch für größere n einigermaßen schnell zu berechnen.

Beispiel 3.1.12. Man berechne $p(12)$.

Lösung:
Es ist

$$\begin{aligned} p(0) &= 1 \\ p(1) &= 1 \\ p(2) &= p(1) + p(0) = 2 \\ p(3) &= p(2) + p(1) = 3 \\ p(4) &= p(3) + p(2) = 5 \\ p(5) &= p(4) + p(3) - p(0) = 7 \\ p(6) &= p(5) + p(4) - p(1) = 11 \\ p(7) &= p(6) + p(5) - p(2) - p(0) = 15 \\ p(8) &= p(7) + p(6) - p(3) - p(1) = 22 \\ p(9) &= p(8) + p(7) - p(4) - p(2) = 30 \\ p(10) &= p(9) + p(8) - p(5) - p(3) = 42 \\ p(11) &= p(10) + p(9) - p(6) - p(4) = 56 \\ p(12) &= p(11) + p(10) - p(7) - p(5) + p(0) = 77 \end{aligned}$$

Kapitel 4

Ramseytheorie

4.1 Der Satz von Ramsey

Das einfachste und bekannteste Beispiel der Ramseytheorie kann wie folgt eingekleidet werden:
Auf einer Party treffen zufällig sechs Personen zusammen. Dann gibt es unter ihnen stets eine Gruppe von drei Personen, die sich alle gegenseitig kennen oder gegenseitig nicht kennen.

Wir haben also eine Menge S (bestehend aus sechs Personen) gegeben. Wir betrachten die Menge T der zweielementigen Teilmengen von S (Paare von Personen) und teilen sie in zwei Klassen (Paare von einander bekannten Personen und Paare einander unbekannter Personen).
Es wird behauptet, daß, wenn S groß genug ist (also aus sechs Personen besteht, es dürfen natürlich auch mehr sein), eine Teilmenge von drei Elementen existiert, deren Paare entweder alle zur ersten Klasse oder alle zur zweiten Klasse gehören. Man kann nun auch andererseits fragen: Existiert die beschriebene Teilmenge schon, wenn S nur fünf Personen umfaßt? Die Antwort ist nein, wie wir gleich sehen werden.
Die beiden Ergebnisse, die Existenz der dreielementigen Teilmengen für $|S| \geq 6$ und die Nichtexistenz für mindestens ein S mit $|S| = 5$ drückt man folgendermaßen aus: $R(3, 3, 2) = 6$.
Dabei heißt $R(3, 3, 2)$ Ramseyzahl.
Wir geben nun die allgemeine Definition:
Im allgemeinen Fall können r- elementige Teilmengen (mit $r \geq 2$) statt Paaren, also zweielementigen Teilmengen, betrachtet werden, die dann in zwei Klassen eingeteilt werden.

Definition 4.1.1.

(a) Es sei $r \in \mathbb{N}$ und S eine Menge mit $|S| \geq r$. Die Menge aller r- elementigen Teilmengen von S werde in zwei Klassen α und β geteilt. Eine Teilmenge $S_\alpha \subseteq S$ mit $|S_\alpha| \geq r$ heißt monochromatisch (von der Farbe α), falls alle r- elementigen Teilmengen von S_α zur Klasse α gehören.

(b) Es sei $p, q, r \in \mathbb{N}$ sowie $p \geq r$, $q \geq r$ und $r \geq 1$.
Unter der Ramseyzahl $R(p, q, r)$ versteht man die natürliche Zahl mit der folgenden Eigenschaft:

(i) Es sei $N \geq R(p, q, r)$ und S eine Menge mit $|S| = N$.
Die Menge aller r- elementigen Teilmengen von S werde in zwei Klassen α und β geteilt. Dann gibt es eine monochromatische Teilmenge S_α von der Farbe α mit $|S_\alpha| = p$ oder eine monochromatische Teilmenge S_β von der Farbe β mit $|S_\beta| = q$.
Man sagt: S hat die Ramseyeigenschaft.

(ii) Es sei $N < R(p,q,r)$. Dann gibt es eien Menge S mit $|S| = N$ und eine Einteilung der Menge der r- elementigen Teilmengen von S in Klassen α und β, so daß es weder eine monochromatische p- elementige Teilmenge von S von der Farbe α, noch eine monochromatische q-elementige Teilmenge von der Farbe β gibt.

Der Satz von Ramsey besagt, daß $R(p,q,r)$ stets existiert. Bevor wir ihn formulieren und beweisen, kehren wir zum Eingangsbeispiel zurück:

Satz 4.1.2. *Es ist* $R(3,3,2) = 6$.

Überlegungen über Ramseyzahlen werden besonders anschaulich, wenn die Begriffe der Graphentheorie verwendet werden.

Definition 4.1.3. Ein Graph $\mathcal{G}$ ist ein Tripel (E,K,I) bestehend aus zwei Mengen E (Ecken), K (Kanten) und einer Relation $I \subseteq E \times K$ (Inzidenz). Jede Kante $k \in K$ ist zu genau zwei Ecken $e \in E$ inzident. Der Graph $\mathcal{G}$ heißt vollständig, wenn je zwei verschiedene Ecken von $\mathcal{G}$ zu genau einer Kante inzident sind.

Beweis. (Beweis von Satz 4.1.2)

(i) Es sei S eine Menge mit $|S| = 6$. Die zweielementigen Teilmengen von S seien in zwei Klassen α und β geteilt. Wir betrachten S als die Eckenmenge eines vollständigen Graphen $\mathcal{G}$ mit sechs Ecken. Die Kante $\overline{PQ}$ werde rot gefärbst, falls $\{P,Q\} \in \alpha$ ist, andernfalls blau.
Von jeder Ecke gehen fünf Kanten aus. Zu mindestens einer der Farben rot oder blau muß es eine Ecke geben, von der mindestens drei Kanten derselben Farbe ausgehen. O.B.d.A nehmen wir an, daß von A drei rote Kanten ausgehen. Die von A verschiedenen Endpunkte seien B_1, B_2 und B_3. Ist mindestens eine der Kanten zwischen einem der drei Paare (B_1,B_2), (B_1,B_3) oder (B_2,B_3) rot, o.B.d.A. zwischen B_1 und B_2, so ist $\{A,B_1,B_2\}$ ein rotes Dreieck. Sind alle diese Kanten blau, so ist $\{B_1,B_2,B_3\}$ ein blaues Dreieck.

(ii) Es sei $S = \{1,2,3,4,5\}$ und $\alpha = \{\{1,2\},\{2,3\},\{3,4\},\{4,5\},\{5,1\}\}$ und $\beta = \{\{1,3\},\{3,5\},\{5,2\},\{2,4\},\{4,1\}\}$. Damit enthält S keine monochromatische Teilmenge mit drei Elementen.

□

Satz 4.1.4. *(Satz von Ramsey)*
Es seien p,q,r natürliche Zahlen mit $r \geq 1$, $p \geq r$ und $q \geq r$. Dann existiert die Ramseyzahl $R(p,q,r)$.

Beweis. Wir führen den Beweis durch Induktion nach r:
$r = 1$:
Wir zeigen, daß $R(p,q,1) = p + q - 1$ gilt.
Es sei S eine Menge mit $p + q - 2$ Elementen, von denen $p - 1$ zur Klasse α und $q - 1$ zur Klasse β gehören. Dann hat S offenbar nicht die Ramseyeigenschaft.
Ist S eine Menge mit $N \geq p + q - 1$ Elementen, die in zwei Klassen α und β eingeteilt sind, so muß die Klasse α mindestens p oder die Klasse β mindestens q Elemente enthalten, d.h. S hat die Ramseyeigenschaft. Also ist $R(p,q,1) = p + q - 1$.

$r \to r + 1$:
Es sei $p = r$ und $|S| \geq q$. Gibt es eine Teilmenge $S_\alpha \subseteq S$ mit $|S_\alpha| = r$, die zur Klasse α gehört, so hat

S die Ramseyeigenschaft.
Andernfalls enthält eine beliebige Teilmenge $S_\beta \subseteq S$ mit $|S_\beta| = q$ nur r- elementige Teilmengen der Klasse β, und S hat wiederum die Ramseyeigenschaft. Also gilt $R(r, q, r) = q$.
Analog zeigt man $R(p, r, r) = p$.
Es sei nun die Existenz der Ramseyzahlen $p_1 = R(p-1, q, r)$ und $q_1 = R(p, q-1, r)$ schon bewiesen.
Es sei S eine Menge mit $|S| = N \geq R(p_1, q_1, r-1) + 1$, und die Teilmengen $T \subseteq S$ mit $|T| = r$ seien in zwei Klassen α und β eingeteilt.
Es sei a_0 ein beliebiges Element von S und $S' = S - \{a_0\}$. Eine Teilmenge $T' \subseteq S'$ mit $|T'| = r-1$ heiße von der Klasse α', falls $T' \cup \{a_0\}$ der Klasse α angehört, andernfalls von der Klasse β'. Wegen $|S'| \geq R(p_1, q_1, r-1)$ trifft mindestens einer der folgenden Fälle zu:
Fall 1:
Es gibt eine Teilmenge $S_{\alpha'} \subseteq S'$ mit $|S_{\alpha'}| = p_1$, so daß alle $T \subseteq S_{\alpha'}$ mit $|T| = r-1$ zur Klasse α' gehören.
Fall 2:
Es gibt eine Teilmenge $S_{\beta'} \subseteq S'$ mit $|S_{\beta'}| = q_1$, so daß alle $T \subseteq S_{\beta'}$ mit $|T| = r-1$ zur Klasse β' gehören.

Es treffe Fall 1 zu:
Wegen $p_1 = R(p-1, q, r)$ trifft mindestens einer der Unterfälle a) oder b) zu:
Unterfall a):
Es gibt $S_1 \subseteq S_{\alpha'}$ mit $|S_1| = p-1$, so daß alle $T \subseteq S_1$ mit $|T| = r$ zu α gehören.

Unterfall b):
Es gibt $S_2 \subseteq S_{\alpha'}$ mit $|S_2| = q$, so daß alle $T \subseteq S_2$ mit $|T| = r$ zu β gehören.

Trifft Unterfall a) zu, so gehören alle $T \subseteq S_1 \cup \{a_0\}$ mit $|T| = r$ zu α, und S besitzt die Ramseyeigenschaft.
Im Unterfall b) besitzt S offensichtlich die Ramseyeigenschaft.

Fall 2 wird analog behandelt. □

Definition 4.1.5. Es sei $e \in E$ die Ecke eines Graphen (E, K, I). Unter dem Grad von e (Schreibweise: grad e) versteht man die Anzahl der Kanten, zu denen e inzident ist.

Lemma 4.1.6. *Es sei $\mathcal{G} = (E, K, I)$ ein Graph. Die Summe der Grade aller Ecken von $\mathcal{G}$ ist zweimal die Anzahl der Kanten von $\mathcal{G}$, also insbesondere gerade.*
Die Anzahl der Ecken mit einem ungeraden Grad ist gerade.

Beweis. Es ist

$$\sum_{e \in E} grad\ e = \sum_{e \in E} \sum_{\substack{k \in K \\ (e,k) \in I}} 1 = \sum_{k \in K} \sum_{\substack{e \in E \\ (e,k) \in I}} 1 = 2|K|,$$

da jede Kante zu zwei Ecken inzident ist.
Es ist $E = E_1 \cup E_2$ mit $E_1 = \{e \in E :\ grad\ e \quad \text{ist gerade}\}$ und $E_2 = \{e \in E :\ grad\ e \quad \text{ist ungerade}\}$ und damit $2|K| = \sum_{e \in E_1} grad\ e + \sum_{e \in E_2} grad\ e$.
Da $\sum_{e \in E_1} grad\ e$ gerade ist, ist auch $\sum_{e \in E_2} grad\ e$ gerade. Da aber $grad\ e$ für $e \in E_2$ ungerade ist, muß $|E_2|$ gerade sein. □

Satz 4.1.7. *Für $p \geq 2$ und $q \geq 2$ ist*

$$R(p, q, 2) \leq R(p, q-1, 2) + R(p-1, q, 2).$$

Sind $R(p, q-1, 2)$ *und* $R(p-1, q, 2)$ *beide gerade, gilt sogar*

$$R(p, q, 2) \leq R(p, q-1, 2) + R(p-1, q, 2) - 1.$$

Beweis. Es sei $\mathcal{G}$ ein vollständiger Graph mit $N = R(p, q-1, 2) + R(p-1, q, 2)$ Ecken, dessen Kanten alle rot oder gelb gefärbt seien. Es sei $e \in E$ eine beliebige aber fest gewählte Ecke von $\mathcal{G}$. Es sei $\mathcal{C}$ die Menge aller Ecken von $\mathcal{G}$, die mit e durch rote Kanten verbunden sind und $\mathcal{D}$ die Menge der restlichen Ecken von $\mathcal{G}$, die mit e durch gelbe Kanten verbunden sind. Es ist

$$\begin{aligned} |\mathcal{C}| &\geq R(p-1, q, 2) \quad \text{oder} \\ |\mathcal{D}| &\geq R(p, q-1, 2). \end{aligned}$$

Wir betrachten den zweiten Fall, für den ersten Fall sind die Überlegungen analog.
Es sei $\mathcal{G}_D$ der vollständige Graph, der aus den Ecken von $\mathcal{D}$ gebildet ist. Nach der Definition der Ramseyzahl enthält $\mathcal{D}$ eine Teilmenge S_α mit $|S_\alpha| = p$ mit roten Kanten oder eine Teilmenge S_β mit $|S_\beta| = q-1$ mit gelben Kanten. Im ersten Fall ist S_α eine monochromatische Teilmenge von der Farbe rot mit $|S_\alpha| = p$. Im zweiten Fall ist $S_\beta \cup \{e\}$ eine monochromatische Teilmenge von der Farbe gelb mit $S_\beta| \leq q$.
Damit ist der erste Teil beweisen.
Es seien nun $R(p, q-1, 2)$ und $R(p-1, q, 2)$ beide gerade. Wir betrachten dann einen vollständigen Graphen $\mathcal{U}$ mit $M := R(p, q-1, 2) + R(p-1, q, 2) - 1$ Ecken. Die Kanten von $\mathcal{U}$ seien alle rot oder gelb gefärbt. M ist ungerade. Wir wenden Lemma 4.1.6 auf den Teilgraphen von $\mathcal{U}$ an, der aus allen Ecken von $\mathcal{U}$, aber nur aus den roten Kanten von $\mathcal{U}$ besteht. Nach Lemma 4.1.6 ist die Anzahl der Ecken von $\mathcal{U}$, von denen eine ungerade Anzahl von roten Kanten ausgeht, gerade. Da die Gesamtzahl M der Ecken ungerade ist, gibt es eine Ecke e von $\mathcal{U}$, von der eine gerade Anzahl von roten Kanten ausgeht. Wieder sei $\mathcal{C}$ die Menge der Ecken von $\mathcal{U}$, die mit e durch rote Kanten verbunden sind, und $\mathcal{D}$ sei die Menge von Ecken von $\mathcal{U}$, die mit e durch gelbe Kanten verbunden sind. Es ist

$$\begin{aligned} |\mathcal{C}| &\geq R(p-1, q, 2) \quad \text{oder} \\ |\mathcal{D}| &\geq R(p, q-1, 2). \end{aligned}$$

Da $\mathcal{C}$ gerade ist, folgt

$$|\mathcal{C}| \geq R(p-1, q, 2).$$

Der Beweis wird dann beendet wie im ersten Teil. □

Kapitel 5

Block- Designs und Orthogonale lateinische Quadrate

5.1 Block- Designs

Definition 5.1.1. Ein balanciertes unvollständiges Block- Design (BIBD) mit Parametern (v, b, r, k, λ), also kurz: ein Design $D(v, b, r, k, \lambda)$, ist ein Paar $(\mathcal{D}, \mathcal{B})$, wobei $\mathcal{D}$ eine Menge von v Objekten und $\mathcal{B}$ eine Menge von b Teilmengen von $\mathcal{D}$ ist, die Blöcke genannt wird, so daß jeder Block genau k verschiedene Objekte enthält, jedes Objekt in genau r verschiedenen Blöcken vorkommt und jedes Paar von verschiedenen Objekten $\{a_i, a_j\}$ zusammen in genau λ Blöcken vorkommt.

Beispiel 5.1.2. Es sei $\mathcal{D} = \{1, 2, \ldots, 7\}$ und $\mathcal{B} = \{B_1, \ldots, B_7\}$ mit den Blöcken

$$\begin{aligned} B_1 &= \{3,5,6,7\}, \quad B_2 = \{1,4,6,7\}, \quad B_3 = \{1,2,5,7\}, \quad B_4 = \{1,2,3,6\}, \\ B_5 &= \{2,3,4,7\}, \quad B_6 = \{1,3,4,5\}, \quad B_7 = \{2,4,5,6\}. \end{aligned}$$

Wie man nachprüfen kann, tritt jedes Objekt in genau vier Blöcken auf und jedes Paar von Objekten in genau zwei Blöcken. Also ist $(\mathcal{D}, \mathcal{B})$ ein Design $D(7, 7, 4, 4, 2)$.

Satz 5.1.3. *Für ein Design $D(v, b, r, k, \lambda)$ gilt:*

$$\begin{aligned} b \cdot k &= v \cdot r \quad \textit{und} \\ r \cdot (k-1) &= \lambda \cdot (v-1). \end{aligned}$$

Beweis. Wir zählen die Menge $\mathcal{M}_1 = \{(P, \mathcal{B}) : \ P \in \mathcal{D}, B \in \mathcal{B}, P \in B\}$ auf zwei Arten ab. Da jeder Block k Punkte enthält, ist $|\mathcal{M}_1| = b \cdot k$. Da jeder Punkt in r Blöcken vorkommt, ist $|\mathcal{M}_1| = v \cdot r$.

Nun wird die Menge $\mathcal{M}_2 = \{(P_1, P_2, \mathcal{B}) : \ P_1 \neq P_2 \in \mathcal{D}, B \in \mathcal{B}, P_1, P_2 \in B\}$ auf zwei Arten abgezählt. Zu jedem $P_1 \in \mathcal{D}$ gibt es r Blöcke mit $P_1 \in B$. Diese enthalten zusammen $r \cdot (k-1)$ Punkte $P_1 \neq P_2$. Also ist $|\mathcal{M}_2| = v \cdot r \cdot (k-1)$. Da andererseits jedes von den $v \cdot (v-1)$ Paaren (P_1, P_2) jeweils in λ Blöcken enthalten ist, gilt: $|\mathcal{M}_2| = \lambda \cdot v \cdot (v-1)$. □

5.2 Affine und projektive Ebenen

Der allgemeine Begriff der (endlichen oder unendlichen) affinen Ebene stellt eine Verallgemeinerung der in der Linearen Algebra betrachteten Ebenen

$$K^2 = \{\vec{x} = (x, y) : \ x, y, \in K\},$$

wobei K ein Körper ist, dar.
Die Elemente $\vec{x} = (x, y)$ von K^2 heißen Punkte der affinen Ebene, Teilmengen g der Form

$$g = \{\vec{x}_0 + t \cdot \vec{y},\ t \in K\}$$

mit $\vec{y} \neq \vec{0}$ heißen Geraden.
Die affine Ebene K^2 ist endlich bzw. unendlich, wenn der Körper K endlich bzw. unendlich ist.

Während in der Analysis die unendlichen affinen Ebenen über den Körpern $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ die Hauptrolle spielen, tun dies in der Kombinatorik die endlichen affinen Ebenen über endlichen Körpern.
Mit Methoden der Linearen Algebra beweist man leicht folgende Tatsachen über die affine Ebene $\mathbb{E} = K^2$.

- A1:
  Zu je zwei verschiedenen Punkten P_1, P_2 von $\mathbb{E}$ gibt es genau eine Gerade g, so daß $P_1, P_2 \in g$.
- A2:
  Ist g_1 eine Gerade, P ein Punkt mit $P \notin g_1$, so gibt es genau eine Gerade g_2 mit $P \in g_2$ und $g_2 \cap g_1 = \emptyset$, die Parallele zu g_1 durch P.
- A3:
  Zwei Geraden schneiden sich stets in keinem oder in einem Punkt.
- A4:
  $\mathbb{E}$ enthält vier Punkte, von denen keine drei auf einer Geraden liegen.

Eine affine Ebene kann nun auch definiert werden, ohne einen Körper zugrunde zu legen:

Definition 5.2.1. Eine affine Ebene ist ein Paar $(\mathbb{E}, \mathbb{G})$ bestehend aus einer Menge $\mathbb{E}$, deren Elemente Punkte genannt werden, und einer Menge $\mathbb{G}$ von Teilmengen von $\mathbb{E}$, Geraden genannt, so daß die Axiome A1-A4 erfüllt sind.
Aus jeder affinen Ebene $(\mathbb{E}, \mathbb{G})$ kann nun eine Struktur mit einer einfacheren Axiomatik, eine projektive Ebene, konstruiert werden. Man sieht leicht, daß die Parallelität eine Äquivalenzrelation auf der Menge $\mathbb{G}$ und somit eine Partition von $\mathbb{G}$ in Äquivalenzklassen, Parallelscharen genannt, ergibt.

Es sei eine affine Ebene $(\mathbb{E}, \mathbb{G})$ gegeben. Wir vergrößern $\mathbb{E}$, die Menge der Punkte, durch Hinzunahme der Menge $\mathcal{U}$ der Parallelscharen, uneendlich ferne Punkte genannt. Ein unendlich ferner Punkt Q liegt genau dann auf einer Geraden g, wenn $g \in Q$, d.h. wenn g der Parallelenschar Q angehört.
Zu den Geraden von $\mathbb{G}$ fügen wir die unendlich ferne Gerade $\mathcal{U}$, die Menge aller unendlich fernen Punkte hinzu.
Das Paar $(\mathbb{P}, \mathbb{G}')$ mit $\mathbb{P} = \mathbb{E} \cup \mathcal{U}$ und $\mathbb{G}' = \mathbb{G} \cup \{\mathcal{U}\}$ erfüllt dann folgendes System von Axiomen:

- P1:
  Zu je zwei verschiedenen Punkten P_1, P_2 von $\mathbb{P}$ gibt es genau eine Gerade $g \in \mathbb{G}'$, so daß $P_1, P_2 \in g$.
- P2:
  Zwei verschiedene Geraden schneiden sich stets in genau einem Punkt.
- P3.
  $\mathbb{P}$ enthält vier Punkte, von denen keine drei auf einer Geraden liegen.

Definition 5.2.2. Eine projektive Ebene ist ein Paar $(\mathbb{P}, \mathbb{G}')$ bestehend aus einer Menge $\mathbb{P}$, deren Elemente Punkte genannt werden, und einer Menge $\mathbb{G}'$ von Teilmengen von $\mathbb{P}$, Geraden genannt, so daß die Axiome P1-P3 erfüllt sind. ist $(\mathbb{E}, \mathbb{G}) = (K^2, \mathbb{G})$ eine affine Ebene über einem Körper K, so können die Punkte der durch Erweiterung von $\mathbb{E}$ entstehenden projektiven Ebene $\mathbb{P}$ durch homogene Koordinaten beschrieben werden.
Wir identifizieren dazu mittels der Abbildung $\Phi: \mathbb{E} = K^2 \to K^3$ die Punkte von $\mathbb{E}$ mit Geraden in K^3 durch den Ursprung $(0,0,0)$. Die Abbildung Φ ist wie folgt definiert:
Ist $P = (x, y)$, so ist $\Phi(P)$ die Gerade durch den Ursprung $(0,0,0)$ und den Punkt $(x, y, 1)$. Dieser Punkt gehört der Ebene $\mathbb{E}^* = \{(x, y, 1) : x, y \in K\}$ an, die zur xy- Ebene parallel ist.
Das Paar $(\Phi(\mathbb{E}), \Phi(\mathbb{G}))$ ist dann eine affine Ebene, die zu $\mathbb{E}$ "isomorph" ist.
Wie man leicht sieht, sind die Geraden in $\Phi(\mathbb{G})$ die Mengen, die aus den Geraden von festen Ebenen durch $(0,0,0)$ bestehen.
Es vermittelt Φ also Abbildungen zwischen folgenden Objekten:
P Punktvon $\mathbb{E} = K^2 \Rightarrow_\Phi \quad \Phi(P)$ (Punkt von $\Phi(\mathbb{E})$: Gerade durch $(0,0,0)$)
g Gerade von $\mathbb{E} = K^2 \Rightarrow_\Phi \quad \Phi(g)$ (Gerade von $\Phi(\mathbb{E})$: Menge von Geraden in einer Ebene durch $(0,0,0)$)

Wir ergänzen $\Phi(\mathbb{E})$ durch Hinzunahme der unendlich fernen Punkte und der
unendlich fernen Geraden $\mathcal{U}$. Wir definieren als unendlich ferne Punkte die Geraden des K^3 durch $(0,0,0)$, welche die Ebene $\mathbb{E}^*$ nicht schneiden. Dies sind die Geraden, die in der xy- Ebene verlaufen, also die Geraden von der Form $g = \{(ux, uy, 0) | \, u \in K\}$. Wir fügen ferner die Menge $\mathcal{U}$ als neue Gerade, die unendlich ferne Gerade hinzu. Dann erfüllt das Paar $(\mathbb{P}, \mathbb{G}')$ mit $\mathbb{P} = \Phi(\mathbb{E}) \cup \mathcal{U}$ und $\mathbb{G}' = \Phi(\mathbb{G}) \cup \{\mathcal{U}\}$ die Axiome einer projektiven Ebene.
Die homogenen Koordinaten eines Punktes P von $\mathbb{P}$ ist die Menge aller von $(0,0,0)$ verschiedenen Punkte des K^3, die auf der Geraden P liegen. Es ist also die Menge $\{(ux, uy, u) | \, u \in K - \{0\}\}$. Die homogenen Koordinaten sind somit nur bis auf den Proportionalitätsfaktor $u \neq 0$ bestimmt.

Satz 5.2.3. *Ist K ein endlicher Körper von q Elementen, so besteht die projektive Ebene $(\mathbb{P}, \mathbb{G})$ über K aus $q^2 + q + 1$ Punkten. Es gibt $q^2 + q + 1$ Geraden, von denen jede $(q + 1)$ Punkte enthält. Durch jeden Punkt gehen $(q + 1)$ Geraden. So ist $(\mathbb{P}, \mathbb{G})$ mit den Punkten als Objekten und den Geraden als Blöcken ein Design $D(q^2 + q + 1, q^2 + q + 1, q + 1, q + 1, 1)$.*

Bevor wir diesen Satz beweisen, betrachten wir zunächst den Fall einer allgemeinen endlichen projektiven Ebene, der kein Körper zugrunde liegen braucht.

Satz 5.2.4. *Es sei $(\mathbb{P}, \mathbb{G})$ eine endliche projektive Ebene. Dann gibt es eine natürliche Zahl $n \geq 2$, die Ordnung von $\mathbb{P}$ genannt, so daß folgendes gilt: $(\mathbb{P}, \mathbb{G})$ hat $n^2 + n + 1$ Punkte und $n^2 + n + 1$ Geraden. Jede Gerade enthält $(n + 1)$ Punkte; durch jeden Punkt gehen $(n + 1)$ Geraden. So ist $(\mathbb{P}, \mathbb{G})$ mit den Punkten als Objekten und den Geraden als Blöcken ein Design $D(n^2+n+1, n^2+n+1, n+1, n+1, 1)$.*

Beweis. Nach $P3$ gibt es vier Punkte P_1, P_2, Q_1, Q_2 in $(\mathbb{P}, \mathbb{G})$, von denen keine drei auf einer Geraden liegen. Es sei g_1 die Gerade durch P_1 und Q_1, g_2 die Gerade durch P_2 und Q_2 und r die Anzahl der Geraden durch P_2. Jede dieser Geraden schneidet g_1 in genau einem Punkt. Umgekehrt gibt es zu jedem Punkt Q von g_1 genau eine Gerade durch P_2, die g_1 in Q schneidet. Damit liegen r Punkte auf g_1. Dies gilt auch für jede andere Gerade, die nicht durch P_2 geht. Da in unseren Überlegungen P_2 durch Q_2 ersetzt werden kann, enthält auch jede Gerade, die nicht durch Q_2 geht, genau r Punkte. Also haben alle Geraden, außer möglicherweise g_2, genau r Punkte. Wir können in unseren Überlegungen das Tripel (g_2, P_2, Q_2) durch das Tripel (g_1, P_1, Q_1) ersetzen und erhalten, daß alle Geraden, außer möglicherweise g_1, dieselbe Anzahl an Punkten enthalten. Da es aber mindestens sechs Geraden gibt- die Verbindungsgeraden der Punkte P_1, P_2, Q_1, Q_2- enthalten alle Geraden r Punkte.
Wir haben anfangs gezeigt, daß die Anzahl der Geraden durch P_2 gleich der Anzahl der Punkte auf

g_1 ist. Da in dieser Überlegung das Paar (P_2, g_1) durch ein beliebiges Paar (P, g) mit $P \notin g$ ersetzt werden kann, gehen durch jeden Punkt r Geraden.
Wir setzen $n = r + 1$.
Es sei $P \in \mathbb{P}$ beliebig. Jeder Punkt von $\mathbb{P} - \{P\}$ liegt auf genau einer der $(n+1)$ Geraden durch P. Jede dieser Geraden enthält genau n Punkte $\neq P$. Damit enthält $\mathbb{P}$ insgesamt $n^2 + n + 1$ Punkte.
Indem man in jeder der vorausgehenden Überlegungen die Begriffe "Punkt" und "Gerade" vertauscht (Dualitätsprinzip) erhält man, daß $\mathbb{P}$ auch $n^2 + n + 1$ Geraden enthält. □

Beweis. (Beweis von Satz 5.2.3:)
Der $K^3 - \{(0,0,0)\}$ enthält $q^3 - 1$ Elemente. Je $(q-1)$ dieser Elemente gehören zu derselben Geraden durch den Ursprung, also zum selben Punkt der projektiven Ebene. Damit enthält $\mathbb{P}$ somit $\frac{q^3-1}{q-1} = q^2 + q + 1$ Punkte. Der Rest der Behauptung folgt aus Satz 5.2.4. □

Beispiel 5.2.5. Es sei $K = \{0, 1\}$ der Körper mit zwei Elementen. Dann liegt auf jeder Geraden durch $(0,0,0)$ genau ein Element aus $K^3 - \{(0,0,0)\}$.
Daher ist

$$\begin{aligned}\mathbb{P} &= \{\{(0,0,1)\},\{(0,1,0)\},\{(0,1,1)\},\{(1,0,0)\},\{(1,0,1)\},\{(1,1,0)\},\{(1,1,1)\}\}\\ &:= \{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7\}.\end{aligned}$$

Liegen zwei Punkte auf einer Geraden, so liegt auch jeder der durch eine beliebige Linearkombination der homogenen Koordinaten dieser zwei Punkte dargestellte Punkt darauf. $\mathbb{P}$ hat damit folgende Geraden:

$$\begin{aligned}g_1 &= \{P_1, P_2, P_3\},\ g_2 = \{P_1, P_4, P_5\},\ g_3 = \{P_1, P_6, P_7\}\\ g_4 &= \{P_2, P_4, P_6\},\ g_5 = \{P_2, P_5, P_7\},\ g_6 = \{P_3, P_5, P_6\}\\ g_7 &= \{P_3, P_4, P_7\}\end{aligned}$$

Beispiel 5.2.6. Wir haben $K = \{0, 1, -1\}$ mit den Verknüpfungstafeln

+	0	1	-1
0	0	1	-1
1	1	-1	0
-1	-1	0	1

und

·	1	-1
1	1	-1
-1	-1	1

Wir listen zunächst die homogenen Koordinaten der dreizehn Punkte auf:

$$\begin{aligned}P_1 &: \{(0,0,1),(0,0,-1)\},\quad P_2 : \{(0,1,0),(0,-1,0)\},\quad P_3 : \{(0,1,1),(0,-1,-1)\}\\ P_4 &: \{(0,-1,1),(0,1,-1)\},\quad P_5 : \{(1,0,0),(-1,0,0)\},\quad P_6 : \{(1,0,1),(-1,0,-1)\}\\ P_7 &: \{(1,0,-1),(-1,0,1)\},\quad P_8 : \{(1,1,0),(-1,-1,0)\},\quad P_9 : \{(1,-1,0),(-1,1,0)\}\\ P_{10} &: \{(1,1,1),(-1,-1,-1)\},\quad P_{11} : \{(1,1,-1),(-1,-1,1)\},\quad P_{12} : \{(1,-1,1),(-1,1,-1)\}\\ P_{13} &: \{(1,-1,-1),(-1,1,1)\}.\end{aligned}$$

Die Geraden sind gegeben durch:

$$\begin{aligned}g_1 &= \{P_1, P_2, P_3, P_4\},\ g_2 = \{P_1, P_5, P_6, P_7\},\ g_3 = \{P_1, P_8, P_{10}, P_{11}\}\\ g_4 &= \{P_1, P_9, P_{12}, P_{13}\},\ g_5 = \{P_2, P_5, P_8, P_9\},\ g_6 = \{P_2, P_6, P_{10}, P_{12}\}\\ g_7 &= \{P_2, P_7, P_{11}, P_{13}\},\ g_8 = \{P_3, P_5, P_{10}, P_{13}\},\ g_9 = \{P_3, P_6, P_9, P_{11}\}\\ g_{10} &= \{P_3, P_7, P_8, P_{12}\},\ g_{11} = \{P_4, P_5, P_{11}, P_{12}\},\ g_{12} = \{P_4, P_6, P_8, P_{13}\}\\ g_{13} &= \{P_4, P_7, P_9, P_{10}\}.\end{aligned}$$

Beispiel 5.2.7. (Projektive Ebene der Ordnung 4):
Diese wird mittels des Körpers $K = \mathbb{F}_4$ konstruiert. Es ist $\mathbb{F}_4 = \{0, 1, t, t+1\}$. Die Rechenoperationen in $\mathbb{F}_4$ ergeben sich aus den beiden Grundregeln $1 + 1 = 0$ und $t^2 = t \cdot t = t + 1$. Daraus ergibt sich (mittels Assoziativ- und Distributivgesetz) folgende Additions- und Multiplikationstafeln:

$+$	1	t	$t+1$
1	0	$t+1$	t
t	$t+1$	0	1
$t+1$	t	1	0

und

$\cdot$	t	$t+1$
t	$t+1$	t
$t+1$	1	t

Dabei ist 0 das neutrale Element der Addition und 1 das der Multiplikation, und es gilt $0 \cdot a = a \cdot 0 = 0$ für alle $a \in \mathbb{F}_4$.

Wir geben nun die homogenen Koordinaten der 21 Punkte von $\mathbb{P}(\mathbb{F}_4)$ an:

$$
\begin{array}{rcll}
P_1 & : & \{(0,0,1),(0,0,t),(0,0,t+1)\}, & P_2 : \{(0,1,0),(0,t,0),(0,t+1,0)\} \\
P_3 & : & \{(0,1,1),(0,t,t),(0,t+1,t+1)\}, & P_4 : \{(0,1,t),(0,t,t+1),(0,t+1,1)\} \\
P_5 & : & \{(0,1,t+1),(0,t,1),(0,t+1,t)\}, & P_6 : \{(1,0,0),(t,0,0),(t+1,0,0)\} \\
P_7 & : & \{(1,0,1),(t,0,t),(t+1,0,t+1)\}, & P_8 : \{(1,0,t),(t,0,t+1),(t+1,0,1)\} \\
P_9 & : & \{(1,0,t+1),(t,0,1),(t+1,0,t)\}, & P_{10} : \{(1,1,0),(t,t,0),(t+1,t+1,0)\} \\
P_{11} & : & \{(1,1,1),(t,t,t),(t+1,t+1,t+1)\}, & P_{12} : \{(1,1,t),(t,t,t+1),(t+1,t+1,1)\} \\
P_{13} & : & \{(1,1,t+1),(t,t,1),(t+1,t+1,t)\}, & P_{14} : \{(1,t,0),(t,t+1,0),(t+1,1,0)\} \\
P_{15} & : & \{(1,t,1),(t,t+1,t),(t+1,1,t+1)\}, & P_{16} : \{(1,t,t),(t,t+1,t+1),(t+1,1,1)\} \\
P_{17} & : & \{(1,t,t+1),(t,t+1,1),(t+1,1,t)\}, & P_{18} : \{(1,t+1,0),(t,1,0),(t+1,t,0)\} \\
P_{19} & : & \{(1,t+1,1),(t,1,t),(t+1,t,t+1)\}, & P_{20} : \{(1,t+1,t),(t,1,t+1),(t+1,t,1)\} \\
P_{21} & : & \{(1,t+1,t+1),(t,1,1),(t+1,t,t)\} &
\end{array}
$$

und die ersten 14 der 21 Geraden:

$$
\begin{aligned}
g_1 &= \{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5\},\ g_2 = \{P_1, P_6, P_7, P_8, P_9\} \\
g_3 &= \{P_1, P_{10}, P_{11}, P_{12}, P_{13}\},\ g_4 = \{P_1, P_{14}, P_{15}, P_{16}, P_{17}\} \\
g_5 &= \{P_1, P_{18}, P_{19}, P_{20}, P_{21}\},\ g_6 = \{P_2, P_6, P_{10}, P_{14}, P_{18}\} \\
g_7 &= \{P_2, P_7, P_{11}, P_{15}, P_{19}\},\ g_8 = \{P_2, P_8, P_{12}, P_{16}, P_{20}\} \\
g_9 &= \{P_2, P_9, P_{13}, P_{17}, P_{21}\},\ g_{10} = \{P_3, P_6, P_{11}, P_{16}, P_{21}\} \\
g_{11} &= \{P_3, P_7, P_{10}, P_{17}, P_{20}\},\ g_{12} = \{P_3, P_8, P_{13}, P_{14}, P_{19}\} \\
g_{13} &= \{P_3, P_9, P_{12}, P_{15}, P_{18}\},\ g_{14} = \{P_4, P_6, P_{12}, P_{17}, P_{19}\}
\end{aligned}
$$

Die Bestimmung der restlichen sieben Geraden ist Übungsaufgabe.

5.3 Projektive Ebenen und Orthogonale Lateinische Quadrate

Definition 5.3.1. Es seien

$$\mathcal{A} = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}} \quad \text{und} \quad \mathcal{B} = (b_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}}$$

zwei Matrizen gleichen Typs.
Unter dem Hadamard- Produkt von $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ verstehen wir die Matrix

$$\mathcal{C} = ((a_{ij}, b_{ij}))_{\substack{1\leq i\leq m\\ 1\leq j\leq n}}.$$

Bemerkung 5.3.2. Der Begriff der Orthogonalität zweier lateinischer Quadrate $\mathcal{A} = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq m\\ 1\leq j\leq n}}$ und $\mathcal{B} = (b_{ij})_{\substack{1\leq i\leq m\\ 1\leq j\leq n}}$ der Ordnung n läßt sich somit wie folgt formulieren: Das Hadamard- Produkt von $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ enthält jedes der Paare $(1,1),\ldots,(n,n)$ genau einmal.

Definition 5.3.3. Für $n \in \mathbb{N}$ und $n \geq 2$ sei $N(n)$ die maximale Anzahl von paarweise orthogonalen lateinischen Quadraten (OLQ) der Ordnung n.

Satz 5.3.4. *Es ist*

$$N(n) \leq n - 1.$$

Beweis. Es sei $\mathcal{M}$ eine Menge von l OLQ

$$\mathcal{A}^{(1)} = (a_{ij}^{(1)})_{\substack{1\leq i\leq m\\ 1\leq j\leq n}}, \ldots, \mathcal{A}^{(l)} = (a_{ij}^{(l)})_{\substack{1\leq i\leq m\\ 1\leq j\leq n}}$$

der Ordnung n.
Die Änderung der Namen der Elemente in einem einzelnen Quadrat $\mathcal{A}^{(k)}$ ändert nichts an der Orthogonalität. Somit können wir annehmen, daß die Zeilen in allen $\mathcal{A}^{(k)}$ die Form $(1,2,\ldots,n)$ haben. Im Hadamard- Produkt zweier $\mathcal{A}^{(k)}$ kommen daher die Paare $(1,1),\ldots,(n,n)$ alle genau einmal in der ersten Zeile vor. Die Elemente $\mathcal{A}_{21}^{(k)}$ müssen somit alle untereinander verschieden und auch von 1 verschieden sein. Daher ist $l \leq n - 1$. □

Es stellt sich die Frage, für welche n die maximale Anzahl $N(n) = n-1$ von OLQ tatsächlich erreicht wird. Der nächste Satz zeigt, daß dies äquivalent zur Existenz einer projektiven Ebene der Ordnung n ist.

Satz 5.3.5. *Es sei $n \geq 2$. Es gilt genau dann $N(n) = n-1$, wenn eine projektive Ebene der Ordnung n existiert.*

Beweis. Wir nehmen die Existenz einer projektiven Ebene der Ordnung n an und konstruieren hieraus eine Menge von $n-1$ OLQ. Diese Konstruktion kann auch "umgekehrt" werden, womit sich beide Existenzaussagen als äquivalent erweisen.
Es sei $(\mathbb{P}, \mathbb{G})$ eine projektive Ebene der Ordnung n und L eine beliebige Gerade von $\mathbb{P}$. Nach Satz 5.2.4 enthält L genau $n+1$ Punkte, die wir als $U, V, W_1, \ldots W_{n-1}$ benennen. Durch jeden dieser Punkte gehen nach Satz 5.2.4 außer L noch n weitere Geraden. Die (jeweils von L verschiedenen) Geraden ducrh U seien $u_1,\ldots,u_n$, die durch V seien $v_1,\ldots,v_n$ und die durch W_k $(1 \leq k \leq n-1)$ seien $w_{k,1},\ldots,w_{k,n}$.
Das k- te lateinische Quadrat $\mathcal{A}^{(k)} = (a_{ij}^{(k)})$ wird nun folgendermaßen konstruiert: Es gibt genau eine Gerade $w_{k,l}$ von den Geraden $w_{k,1},\ldots,w_{k,n}$ durch W_k, die durch den Schnittpunkt von u_i und v_j geht. Wir setzen dann: $\mathcal{A}_{ij}^{(k)} = l$.
Die paarweise Orthogonalität der so konstruieren $\mathcal{A}^{(k)}$ folgt leicht aus den Eigenschaften von $(\mathbb{P}, \mathbb{G})$. □

Bemerkung 5.3.6. Es ist bekannt, daß genau dann ein endlicher Körper der Ordnung n existiert, wenn $n = p^\alpha$ eine Primzahlpotenz ist. Nach Abschnitt 5.2 existiert dann auch eine projektive Ebene der Ordnung n. Somit gilt für alle Primzahlpotenzen $n = p^\alpha$:

$$N(n) = n - 1. \qquad (*)$$

Es ist bis heute unbekannt, ob es noch andere Werte von n gibt, für die $N(n) = n-1$ ist. Ein Spezialfall des Satzes von Bruck, Chowla und Ryser besagt, daß $N(n) < n - 1$, wenn $n \equiv 1 \mod 4$ oder $n \equiv 2 \mod 4$ und n nicht die Summe von zwei Quadratzahlen ist. Daraus folgt unter anderem

$$N(6) < 5,\ N(14) < 13,\ N(21) < 20,\ N(22) < 21.$$

Lam konnte 1991 erst $N(10) < 9$ zeigen. Der kleinste ungeklärte Fall ist $n = 12$. Es ist bekannt, daß $5 \leq N(12) \leq 11$.
Weitere Ergebnisse über $N(n)$ sind:

- $N(n) \geq 2$ für $n \neq 2, 6$.
- $N(n) \to \infty$ für $n \to \infty$